Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 136.

In vier Heften.

Berlin,
W. 35, Lützowstraße 107/8.
Druck und Verlag von Georg Reimer.
1909.

Inhaltsverzeichnis des Bandes 136.

Busche, E., Zur Theorie der Funktion $[x]$ . . . . . Seite 39

Gundelfinger, S., Über die Kennzeichen, welche die Lage eines Punktes in bezug auf ein Tetraeder unter Zugrundelegung allgemeiner projektiver Koordinaten entscheiden . . . . . — 1

Hellinger, E., Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen . . . . . — 210

Hensel, K., Über die zu einer algebraischen Gleichung gehörigen Auflösungskörper . . . . . — 183

Hurwitz, A., Über die Kongruenz $ax^e + by^e + cz^e \equiv 0 \pmod{p}$ . . . . . — 272

Perron, O., Über einen Satz des Herrn *Poincaré* . . . . . — 17

Rémoundos, G., Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement . . . . . — 58

Voronoï, G., Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques . . . . . — 67

Wieferich, A., Zum letzten *Fermat*schen Theorem . . . . . — 293

— — Zur Dreiecksgeometrie. . . . . — 303

Thomé, L. W., Über simultane lineare Differentialgleichungen (Zusatz zu den Abhandlungen des Verfassers in den Bänden 131, 133 dieses Journals) — 306

Zusatz zu der Abhandlung „Zur Determinanten-Lehre“ des Herrn *L. Saalschütz* in Band 134 dieses Journals . . . . . — 66

Ein neues Bildnis von *Dirichlet* . . . . . — 66

206258

Über die Kennzeichen, welche die Lage eines Punktes inbezug auf ein Tetraeder unter Zugrundelegung allgemeiner projektiver Koordinaten entscheiden.

Von Herrn *S. Gundelfinger* in Darmstadt.

Für baryzentrische Koordinaten hat zum ersten Male *Möbius* in seinem baryzentrischen Calcul (1827) § 28—34 solche Kennzeichen gegeben. Dieselben sind jedoch bei Beweisführungen etwas umständlich, da in sie nicht die Verhältnisse der Koordinaten eingehen und infolgedessen stets die absoluten Werte der Koordinaten in Rücksicht gezogen werden müssen.

Für das analoge Problem in der Ebene reicht es für die meisten Fälle aus, nur die beiden Lagen zu unterscheiden, wo ein Punkt entweder im Innern (resp. in den Scheitelwinkeln des Koordinatendreiecks) oder in einem der drei übrigen, je an eine Seite des Dreiecks angrenzenden Felder liegt. In meinen Vorlesungen über Kegelschnitte, hgg. von *F. Dingeldey* (1895)*) habe ich diese beiden Fälle als „*trigonale*“ und „*tetragonale*“ Lage (a. a. O. S. 2 und 241—242) unterschieden und einfache Kriterien hierfür aufgestellt.

Im folgenden sollen zunächst unter Zugrundelegung *baryzentrischer* Koordinaten analoge, auch die besonderen Lagen umfassende Kennzeichen gegeben werden**). Aus ihnen ergeben sich (wie in den „Vorl.“ S. 242) die Kriterien in allgemeinen projektiven Koordinaten von selbst. Hieran schließen sich einige Anwendungen der gegebenen Methoden auf die Kreis- und Kugelgeometrie.

*) Im folgenden als „Vorl.“ zitiert.

**) Für Kurven- und Flächendiskussionen, sowie Anwendungen in der Zahlentheorie sind diese Kennzeichen unentbehrlich.

A. *Fundamentallemma.*

Es seien, bezogen auf ein beliebiges rechtwinkliges oder schiefwinkliges Koordinatensystem x, y, z mit dem Koordinatenfang E (dem später einzuführenden „Einheitspunkt“ E) a', b', c' und a'', b'', c'' die Koordinaten irgendzweier Punkte A' und A''. In *Plücker*schen Ebenenkoordinaten u, v, w ist alsdann die Gleichung irgendeines Punktes $A(a, b, c)$ auf der Verbindungslinie von A' mit A'' durch passende Bestimmung des Verhältnisses $\frac{\varkappa''}{\varkappa'}$ dargestellt durch

$$(1.) \qquad \varkappa' A' + \varkappa'' A'' = 0,$$

worin:

$$(1^{a}.) \qquad A' \equiv a' u + b' v + c' w + 1, \quad A'' \equiv a'' u + b'' v + c'' w + 1.$$

Setzt man in der Identität

$$(1^{b}.) \qquad \varkappa' A' + \varkappa'' A'' \equiv (\varkappa' + \varkappa'')(au + bv + cw + 1) \equiv (\varkappa' + \varkappa'') A$$

für u, v, w die Koordinaten einer Ebene ein, welche durch $A'' = 0$ (resp. $A' = 0$) geht und normal zur Verbindungslinie $A' A''$ ist, so ergibt sich nach vorheriger Division mit $+\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$*)

$$(2.) \qquad \frac{\varkappa'}{\varkappa' + \varkappa''} = \frac{A A''}{A' A''}, \qquad \frac{\varkappa''}{\varkappa' + \varkappa''} = \frac{A A'}{A'' A'},$$

also wie bekannt:

$$(2^{a}.) \qquad \frac{\varkappa''}{\varkappa'} = -\frac{A A'}{A A''}.$$

In diesen Gleichungen sind auch die Richtungen der vorkommenden Strecken berücksichtigt, sodaß z. B.

---

*) vgl. *Hesse*, Vorlesungen über analyt. Geometrie des Raumes. (5. Vorles. Satz 8.)

$$A''A' = -A'A''$$

und nach (2ª.) für $\frac{x''}{x'} > 0$ der Punkt A *zwischen* A' und A'' und für $\frac{x''}{x'} < 0$ der Punkt A *außerhalb* der Strecke $A'A''$ liegt*). In beiden Fällen liegt der Punkt A *näher* an A', wenn

$$\left|\frac{x''}{x'}\right| < 1,$$

d. h. wenn

$$\frac{1 - \frac{x''}{x'}}{1 + \frac{x''}{x'}} = \frac{x' - x''}{x' + x''} > 0.$$

Man hat daher das *Fundamentallemma:*
Unter Anwendung der Bezeichnungen (1.) *und* (1ª.) *liegt der Punkt*

$$x'A' + x''A'' = 0$$

näher an A' oder A'', je nachdem

$$\frac{x'}{x' + x''} - \frac{x''}{x' + x''} > 0 \text{ oder } < 0 \text{ ist.}$$

Im kommenden wird

$$\frac{x'}{x' + x''} = \lambda', \qquad \frac{x''}{x' + x''} = \lambda''$$

gesetzt werden; der Punkt A liegt *zwischen* A' und A'' für $\frac{\lambda'}{\lambda''} > 0$, *außerhalb* für $\frac{\lambda'}{\lambda''} < 0$.

Anmerkung. Wenn $x' + x'' = 0$, so stellt $x'A' + x''A'' = 0$ nach (2ª.) den unendlich fernen Punkt auf $A'A''$ dar.

---

*) vgl. *Möbius*, Ges. Werke I, S. 44.

B. ***Kriterien für ein Fundamentaldreieck in baryzentrischen Koordinaten.***

Sind

$$A_i \equiv a_i u + b_i v + c_i w + 1 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{4.}$$

die *Plücker*schen Punktgleichungen der drei Fundamentalpunkte I, II, III mit den Seiten s_1, s_2, s_3, so stellt bei passender Bestimmung der Verhältnisse $\varkappa_1 : \varkappa_2 : \varkappa_3$

$$\begin{cases} \varkappa_1 A_1 + \varkappa_2 A_2 + \varkappa_3 A_3 \equiv (\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3) A = 0, \\ A \equiv au + bv + cw + 1 \end{cases} \tag{5.}$$

jeden Punkt A in der Ebene des Dreiecks dar. (Man vgl. z. B. *Hesse* a. a. O. 5. Vorl. Sätze 13—16.) Nennt man h_1, h_2, h_3 die drei Höhen des Dreiecks, q_1, q_2, q_3 die Abstände des Punktes A von den drei Seiten s_1, s_2, s_3*), so bestehen die drei Gleichungen:

$$\frac{\varkappa_1}{\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3} = \frac{q_1}{h_1}, \qquad \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3} = \frac{q_2}{h_2}, \qquad \frac{\varkappa_3}{\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3} = \frac{q_3}{h_3}, \tag{6.}$$

oder für

$$\lambda_i = \frac{\varkappa_i}{\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{q_1}{h_1}, \qquad \lambda_2 = \frac{q_2}{h_2}, \qquad \lambda_3 = \frac{q_3}{h_3}, \text{**}) \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1. \end{cases} \tag{6^a.}$$

Beweis: Substituiert man in der Identität (5.) für u, v, w die Koordinaten der Ebene, welche $A_2 = 0$ und $A_3 = 0$ befriedigt und für welche gleichzeitig die Höhe h_1 Normale ist, so erhält man (wie früher nach Divi-

*) *Sämtliche* h_i und q_i sind positiv oder negativ, je nachdem einer der drei Scheitel oder A mit dem Koordinatenanfang E auf *derselben* Seite einer zugehörigen Geraden s_i liegt oder nicht.

**) Für den Schwerpunkt $A_1 + A_2 + A_3 = 0$, d. h. für $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3$ entsteht aus (6^a.) der bekannte Satz

$$q_1 = \tfrac{1}{3} h_1, \quad q_2 = \tfrac{1}{3} h_2, \quad q_3 = \tfrac{1}{3} h_3.$$

sion mit $\sqrt{u^2+v^2+w^2}$) die erste Gleichung in (6.), und durch zyklische Weiterschiebung die beiden übrigen. Die drei Koeffizienten $\varkappa_i$ sind also [wie man auf vielerlei Arten beweisen kann] drei Zahlen, die sich wie die baryzentrischen Koordinaten des Punktes A verhalten. Da wegen (6ª.) die drei λ_i nicht alle negativ sein können, so sind im ganzen nur sieben Kombinationen der Vorzeichen möglich, analog den sieben Feldern, in welche die ganze Ebene durch die Seiten des Fundamentaldreiecks geteilt wird. Die im nachstehenden angegebenen Kriterien folgen geometrisch unmittelbar aus meinen „Vorl." S. 241.

$$\lambda_i = \frac{\varkappa_i}{\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3} = \frac{q_i}{h_i}, \qquad (i=1,2,3)$$

I. $P = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0.$

1. Sämtliche λ_i positiv: Innenlage.
2. Nur *ein* λ_i positiv

a) $\lambda_2<0$, $\lambda_3<0$: *trigonale* Lage bei I.
b) $\lambda_3<0$, $\lambda_1<0$: „ „ „ II.
c) $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$: „ „ „ III.

II. $P = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0.$

a) $\lambda_1<0$, *tetragonal* an der Seite II-III (außen) gelegen.
b) $\lambda_2<0$, „ „ „ „ III-I „ „
c) $\lambda_3<0$, „ „ „ „ I-II „ „

Analytisch (im Anschluß an die vorstehenden Betrachtungen) ergeben sich die hier gegebenen Kriterien folgendermaßen.

(I¹.) Sind sämtliche λ_i positiv, so ist der Punkt A im Innern des Dreiecks gelegen („Innenlage"), weil sich in ihm die Träger der drei Punktepaare schneiden:

$$A_1=0,\ \lambda_2A_2+\lambda_3A_3=0;\quad A_2=0,\ \lambda_3A_3+\lambda_1A_1=0;\quad A_3=0,\ \lambda_1A_1+\lambda_2A_2=0$$

(vgl. Fundamentallemma in A.).

(I 2ª.) Setzt man

$$\lambda_2A_2+\lambda_3A_3 \equiv (\lambda_2+\lambda_3)\,A'' \equiv \lambda''A'',$$

so liegt der Punkt $A''=0$ wegen $\frac{\lambda_2}{\lambda_3}>0$ auf s_1 *zwischen* $A_2=0$ und $A_3=0$; nach dem Lemma in A. befindet sich mit Rücksicht auf $\lambda_1>0$ der Punkt A d. h.

$$\lambda_1 A_1+(\lambda_2+\lambda_3)\,A''=0$$

näher an A_1, also trigonal an der Ecke I.

Analog ergeben sich die sämtlichen übrigen Fälle.

C. *Kennzeichen für ein Fundamentaltetraeder.*

Sind

$$A_i\equiv a_i u+b_i v+c_i w+1=0, \qquad (i=1,2,3,4) \tag{7.}$$

die Gleichungen der 4 Ecken des Koordinatentetraeders (I, II, III, IV) mit den Seitenebenen E_1, E_2, E_3, E_4, so stellt

$$\begin{aligned}(\varkappa_1 A_1+\varkappa_2 A_2+\varkappa_3 A_3+\varkappa_4 A_4)&\equiv(\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3+\varkappa_4)(au+bv+cw+1)\\&\equiv(\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3+\varkappa_4)\,A=0\end{aligned} \tag{8.}$$

jeden Punkt A im Raume dar, wenn man die Verhältnisse $\varkappa_1:\varkappa_2:\varkappa_3:\varkappa_4$ passend bestimmt. Es seien h_i die Höhen des Tetraeders und q_i die Abstände des Punktes $A=0$ in (8.) von den 4 Seitenebenen E_i $(i=1,2,3,4)$, positiv oder negativ genommen, je nachdem einer der 5 Punkte I, II, III, IV, A mit dem Koordinatenanfang E auf derselben Seite einer zugehörigen Ebene E_i liegt oder nicht. Alsdann ist,

$$\begin{cases}\varkappa_1+\varkappa_2+\varkappa_3+\varkappa_4=\Sigma_i\varkappa_i \text{ gesetzt},\\ \frac{\varkappa_1}{\Sigma\varkappa_i}=\frac{q_1}{h_1},\quad \frac{\varkappa_2}{\Sigma\varkappa_i}=\frac{q_2}{h_2},\quad \frac{\varkappa_3}{\Sigma\varkappa_i}=\frac{q_3}{h_3},\quad \frac{\varkappa_4}{\Sigma\varkappa_i}=\frac{q_4}{h_4};\end{cases} \tag{9.}$$

wie man sofort sieht, wenn man die Identität (8.) mit $+\sqrt{u^2+v^2+w^2}$ dividiert und die Koordinaten u, v, w sukzessive je drei der Gleichungen $A_i=0$ befriedigen läßt.*) Setzt man

*) Sind π_i $(i=1,2,3,4)$ die Abstände einer beliebigen Ebene von den Ecken

$$(10.)\qquad \frac{x_1}{\Sigma x_i}=\mu_1,\quad \frac{x_2}{\Sigma x_i}=\mu_2,\quad \frac{x_3}{\Sigma x_i}=\mu_3,\quad \frac{x_4}{\Sigma x_i}=\mu_4,$$

$$(10^a.)\qquad \mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4=1,$$

so können mit Rücksicht auf (10ª.) die μ_i $(i=1,2,3,4)$ nicht alle negativ sein, so daß von den 16 Vorzeichenkombinationen der μ_i nur 15 möglich sind. Analog den Entwicklungen in B. unterscheiden wir die beiden Hauptfälle

$$\text{I.}\quad Q\equiv\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4>0 \quad\text{und}\quad \text{II.}\quad Q=0.$$

I. Für $Q>0$ sind entweder *sämtliche* μ_i oder nur zwei der μ_i positiv und die beiden übrigen negativ, im ganzen also 7 Fälle vorhanden.

II. Ist dagegen $Q<0$, so sind 8 Lagen des Punktes A möglich, je nachdem eines der vier μ_i positiv oder negativ ist.

Sind im Falle I. $(Q>0)$ sämtliche μ_i positiv, so kann der Punkt A nur im Innern des Tetraeders liegen, da er auf den Trägern der *vier* Punktepaare liegt:

$$(11.)\qquad A_i=0,\qquad (11^a.)\quad \mu_{i+1}A_{i+1}+\mu_{i+2}A_{i+2}+\mu_{i+3}A_{i+3}=0$$

$i=1,2,3,4;\ i+1, i+2, i+3$ kleinste positive Reste modulo 4,

und da nach B. der Punkt (11ª.) innerhalb des durch die drei Punkte

$$(12.)\qquad A_{i+1}=0,\quad A_{i+2}=0,\quad A_{i+3}=0$$

gebildeten Dreiecks liegt.

Haben dagegen nur zwei der μ_i gleiches Vorzeichen, etwa μ_1 und μ_2, sowie μ_3 und μ_4, so setze man

$$(13.)\qquad \begin{aligned}\mu_1A_1+\mu_2A_2&\equiv(\mu_1+\mu_2)\ A'\equiv\lambda'\ A',\\ \mu_3A_3+\mu_4A_4&\equiv(\mu_3+\mu_4)\ A''\equiv\lambda''A'',\end{aligned}$$

also

$$(13^a.)\qquad \mu_1A_1+\mu_2A_2+\mu_3A_3+\mu_4A_4\equiv\lambda'A'+\lambda''A'';$$

dann liegen nach dem Lemma in A. im Hinblick auf

I, II, III, IV und q der Abstand des Punktes A von dieser Ebene, so folgt aus (8.):

$$q=\frac{q_1}{h_1}\pi_1+\frac{q_2}{h_2}\pi_2+\frac{q_3}{h_3}\pi_3+\frac{q_4}{h_4}\pi_4.$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} > 0, \quad \frac{\mu_3}{\mu_4} > 0$$

die Punkte $A' = 0$ und $A'' = 0$ auf den *begrenzten* Strecken I-II und III-IV, der Punkt $A = 0$ jedoch nach (13ª.) und nach A. *außerhalb* der Strecke $A'A''$, näher an A' oder A'', je nachdem $\lambda' - \lambda'' >$ oder < 0, d. h. je nachdem die beiden Größen μ_1, μ_2 oder μ_3, μ_4 positiv sind. Man kann diese beiden Lagen des Punktes A als *Keilformlage* an der Kante I-II*) oder an der Kante III-IV bezeichnen.

Ist dagegen $\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4 < 0$ und ein *bestimmtes* μ_i von anderem Vorzeichen als die drei übrigen, so liegt,

$$\mu_{i+1}A_{i+1} + \mu_{i+2}A_{i+2} + \mu_{i+3}A_{i+3} \equiv (\mu_{i+1} + \mu_{i+2} + \mu_{i+3})A'' \equiv \lambda'' A''$$

gesetzt, der Punkt $A = 0$, d. h. $\mu_i A_i + \lambda'' A'' = 0$ auf der Geraden $A_i A''$, aber *außerhalb* der Punkte $A_i = 0$ $A'' = 0$ und zwar nach A. näher an A_i oder an A'', je nachdem μ_i positiv oder negativ ist.

Man wird diese beiden Lagen passend als Dreikantlage an der Ecke A_i oder als Sechskantlage an der Außenseite der Ebene E_i bezeichnen. Das folgende Schema faßt die bisherigen Ergebnisse zusammen:

$$Q \equiv \mu_1\mu_2\mu_3\mu_4; \qquad \mu_i \equiv \frac{x_i}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4} = \frac{q_i}{h_i}. \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

I. $Q > 0$: *Innen- oder Keilformlage.*

1. Sämtliche $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ positiv: *Innerhalb* des Tetraeders.
2. Nur zwei der vier μ_i positiv: *Keilformlage.*

a) $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$: *Keilformlage* an der Kante I-II
b) $\mu_3 > 0$, $\mu_4 > 0$: „ „ „ „ III-IV
c) $\mu_1 > 0$, $\mu_3 > 0$: „ „ „ „ I-III
d) $\mu_2 > 0$, $\mu_4 > 0$: „ „ „ „ II-IV
e) $\mu_1 > 0$, $\mu_4 > 0$: „ „ „ „ I-IV
f) $\mu_2 > 0$, $\mu_3 > 0$: „ „ „ „ II-III.

*) Der Punkt A liegt im *Scheitelraum* des inneren Flächenwinkels der Ebenen E_3 und E_4, begrenzt von den Ebenen E_1 und E_2.

II. $Q<0$: *Dreikant- oder Sechskantlage.*

1. $\mu_i>0$: $(i=1, 2, 3, 4)$: *Dreikantlage* an der Ecke $A_i=0$.

2. $\mu_i<0$: *Sechskantlage* an der Außenseite der Ebene E_i des Tetraeders.

D. Will man statt der baryzentrischen Koordinaten allgemeine projektive Koordinaten (unter Anwendung eines beliebigen Einheitspunktes mit den positiven Abständen e_1, e_2, e_3, e_4 von den Seitenebenen E_i des Fundamentaltetraeders) durch die laufende Proportion einführen:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{q_1}{e_1} : \frac{q_2}{e_2} : \frac{q_3}{e_3} : \frac{q_4}{e_4}, \tag{14.}$$

so wird

$$q_1 : q_2 : q_3 : q_4 = e_1 x_1 : e_2 x_2 : e_3 x_3 : e_4 x_4$$

oder

$$\frac{q_1}{h_1} : \frac{q_2}{h_2} : \frac{q_3}{h_3} : \frac{q_4}{h_4} = \frac{e_1 x_1}{h_1} : \frac{e_2 x_2}{h_2} : \frac{e_3 x_3}{h_3} : \frac{e_4 x_4}{h_4}.$$

Mit Rücksicht auf

$$\frac{q_1}{h_1}+\frac{q_2}{h_2}+\frac{q_3}{h_3}+\frac{q_4}{h_4}=1$$

kann man daher den Satz aussprechen:

Die Kriterien für baryzentrische Koordinaten am Schlusse von C. *gehen in solche für allgemeine projektive Koordinaten* (14.) *über, wenn man die*

$$\mu_1=\frac{q_1}{h_1},\quad \mu_2=\frac{q_2}{h_2},\quad \mu_3=\frac{q_3}{h_3},\quad \mu_4=\frac{q_4}{h_4} \tag{15.}$$

bezw. *ersetzt durch*

$$(15^{a}.) \qquad \frac{p_1 x_1}{\Sigma p_i x_i}, \quad \frac{p_2 x_2}{\Sigma p_i x_i}, \quad \frac{p_3 x_3}{\Sigma p_i x_i}, \quad \frac{p_4 x_4}{\Sigma p_i x_i},$$

worin

$$p_i = \frac{e_i}{h_i}, \quad \Sigma p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4.$$

E. *Bemerkungen über die analytisch-geometrische Kugellehre.*

Die am Schlusse von C. gegebenen Kriterien konnten ohne weiteres aus dem Umstande abgeleitet werden, daß ein Punkt, der aus dem Innern des Tetraeders auf dem kürzesten Wege in eine Keilform- oder Dreikantlage (resp. Sechskantlage) gelangen soll, 2 oder 3 (resp. 1) Seitenebenen durchsetzen muß. Der in B. und C. gegebene Beweis wurde gewählt, um wichtige Anwendungen in der Kreis- und Kugellehre vorzubereiten. Hier sollen nur wenige Andeutungen gegeben werden.

Sind, bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem:

$$(16.) \qquad k_i \equiv (x - a_i)^2 + (y - b_i)^2 + (z - c_i)^2 - r_i^2 = 0, \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

die Gleichungen von irgend vier Kugeln im Raume, so stellt

$$(16^{a}.) \qquad \varkappa_1 k_1 + \varkappa_2 k_2 + \varkappa_3 k_3 + \varkappa_4 k_4 = 0$$

ein dreifach unendliches lineares Kugelsystem dar*). Für ein bestimmtes Wertsystem $\varkappa_1 : \varkappa_2 : \varkappa_3 : \varkappa_4$ stellt unter Anwendung der Bezeichnung (in 4) die Gleichung:

$$(17.) \qquad \varkappa_1 A_1 + \varkappa_2 A_2 + \varkappa_3 A_3 + \varkappa_4 A_4 = 0$$

analytisch den Mittelpunkt der zugehörigen Kugel (in 16^{a}.) dar. Es sind also $\varkappa_1 : \varkappa_2 : \varkappa_3 : \varkappa_4$ die baryzentrischen Koordinaten dieses Mittelpunktes, bezogen auf das Fundamentaltetraeder

*) Nach der Bezeichnung des Herrn Reye: „Kugelgebüsch“.

$$A_1 = 0,\ A_2 = 0,\ A_3 = 0,\ A_4 = 0\text{*)}.$$

Für zwei in *allgemeiner* Form gegebene Kugeln K und L:

$$\begin{aligned} K &\equiv k_{00}(x^2+y^2+z^2) + 2k_{03}x + 2k_{13}y + 2k_{23}z + k_{33} = 0, \\ L &\equiv l_{00}(x^2+y^2+z^2) + 2l_{03}x + 2l_{13}y + 2l_{23}z + l_{33} = 0 \end{aligned} \tag{18.}$$

ist der Kosinus ihres Schnittwinkels $(\cos(K,L))$ gegeben durch

$$\cos(K,L) = \frac{k_{00}l_{33} + k_{33}l_{00} - 2k_{03}l_{03} - 2k_{13}l_{13} - 2k_{23}l_{23}}{2\sqrt{(k_{00}k_{33} - k_{03}^2 - k_{13}^2 - k_{23}^2)(l_{00}l_{33} - l_{03}^2 - l_{13}^2 - l_{23}^2)}} \tag{19.}$$

$$= \frac{(K,L)}{\sqrt{(K,K)}\ \sqrt{(L,L)}},$$

welche Gleichung auch noch Geltung hat, wenn k_{00} oder l_{00} verschwinden, wenn also K oder L in 2 Ebenen ausartet, von denen die eine mit der unendlichen fernen Ebene zusammenfällt.

Da der Radius R der Kugel K bestimmt ist durch:

$$k_{00}^2 R^2 = (k_{03}^2 + k_{13}^2 + k_{23}^2 - k_{00}k_{33}) = -\frac{1}{2}(K,K), \tag{20.}$$

so reduziert sich für $(K,K) = 0$ $(k_{00} \leqslant 0)$ die Kugel $K = 0$ auf eine sogenannte Nullkugel oder „*zirkularen* Kegel", in Übereinstimmung mit der Gleichung

$$2\Sigma \pm (k_{00}\,k_{11}\,k_{22}\,k_{33}) = k_{00} \cdot k_{00} \cdot (K,K)\text{**)}. \tag{20a.}$$

---

*) Auch wenn *ein* oder *zwei* (resp. *drei*) Zentren der vier gegebenen Kugeln ins Unendliche rücken, läßt sich durch passende Einführung von Einheitspunkten die hier gegebene Theorie durchführen.

**) Die Kugel $K = 0$ ist also reell, wenn $(K,K) < 0$ oder auch wenn $\Sigma \pm (k_{00}\,k_{11}\,k_{22}\,k_{33}) < 0$, imaginär, wenn $(K,K) > 0$.

Die Koordinaten ξ, η, ζ des Zentrums dieses zirkularen Kegels sind wie im Falle der *allgemeinen* Kugel:

$$(21.) \qquad \xi = -(k_{03} : k_{00}),\ \eta = -(k_{13} : k_{00}),\ \zeta = -(k_{23} : k_{00}).$$

Nach (18.) schneiden sich zwei Kugeln $K=0$, $L=0$ orthogonal, wenn $(K,L)=0$; speziell liegt auf der Kugel $L=0$ das Zentrum ξ, η, ζ von $K=0$, wenn K in einen zirkularen Kegel ausartet, wenn also außer $(K,L)=0$ auch $(K,K)=0$.

In Anwendung auf den Fall

$$(22.) \qquad K \equiv \varkappa_1 k_1 + \varkappa_2 k_2 + \varkappa_3 k_3 + \varkappa_4 k_4 = 0$$

ergibt sich für $(K,K)=0$ das Theorem:

(23.) *Die Gleichung*

$$\varkappa_1^2 (k_1, k_1) + 2\varkappa_1\varkappa_2 (k_1, k_2) + \cdots + \varkappa_4^2 (k_4, k_4) = 0$$

stellt in baryzentrischen Koordinaten $\varkappa_i$ (bezogen auf das Fundamentaltetraeder der vier Zentra $A_i = 0$) die Orthogonalkugel der 4 Kugeln

$$(23^a.) \qquad k_1 = 0, k_2 = 0, k_3 = 0, k_4 = 0$$

oder jeder Kugel des Systems (16.) *dar.**)

---

*) Sind $\varkappa_1^{(i)} k_1 + \varkappa_2^{(i)} k_2 + \varkappa_3^{(i)} k_3 + \varkappa_4^{(i)} k_4 = 0$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ irgend 4 Nullkugeln im Gebüsch (22.) mit der Beschränkung, daß ihre vier Zentra ein Tetraeder bilden, so wird für die Kugel $L=0$, welche durch diese vier Zentra geht:

$$\varkappa_1^{(i)} (k_1, L) + \varkappa_2^{(i)} (k_2, L) + \varkappa_3^{(i)} (k_3, L) + \varkappa_4^{(i)} (k_4, L) = 0, \qquad (i=1,2,3,4)$$

also wegen $\Sigma \pm (\varkappa_1^1 \varkappa_2^2 \varkappa_3^3 \varkappa_4^4) \gtrless 0$:

$$(k_1, L) = 0, \qquad (k_2, L) = 0, \qquad (k_3, L) = 0, \qquad (k_4, L) = 0.$$

Analog den von mir in *Hesse*, Analyt. Geom. der Ebene, 4. Aufl. 1906 S. 246—251 gegebenen Entwicklungen*) findet man die Sätze:

Alle Kugeln, welche zwei gegebene Kugeln $K_1=0, K_2=0$ unter gleichen oder supplementären Winkeln schneiden, werden von den sogenannten Potenzkugeln:

$$(24.) \qquad K_1\varrho_2 - K_2\varrho_1 = 0, \qquad K_1\varrho_2 + K_2\varrho_1 = 0,$$

$$\varrho_1 = \sqrt{(K_1, K_1)}, \qquad \varrho_2 = \sqrt{(K_2, K_2)},$$

orthogonal getroffen.

Die sechs Potenzkugeln je zweier von drei gegebenen Kugeln

$$k_i \equiv (x_1 - a_i)^2 + (y - b_i) + (z - c_i)^2 - r_i^2, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

gehören einem der vier Büschel an:

$$(25.) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varkappa_1 k_1 + \varkappa_2 k_2 + \varkappa_3 k_3 = 0\ , \\ \varkappa_1 \varrho_1 \pm \varkappa_2 \varrho_2 \pm \varkappa_3 \varrho_3 = 0, \quad \varrho_i = |\sqrt{(k_i, k_i)}|, \end{array} \right. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$(25^a.)$

wobei die baryzentrischen Koordinaten $\varkappa_1 : \varkappa_2 : \varkappa_3$ inbezug auf das Fundamentaldreieck $A_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ (vgl. B.) den Gleichungen der vier Ähnlichkeitsachsen in $(25^a.)$ Genüge leisten. —

Die zwölf Potenzkugeln je zweier von vier Kugeln $k_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ gehören einem der acht Kugelnetze an:

---

*) Bei dieser Gelegenheit bitte ich, a. a. O. *folgende Errata zu berichtigen:*
S. 250, Z. 2 v. o. Nach den Gleichungen $\gamma)$ und $\delta)$ auf S. 248 ist zu setzen:

$$|\sqrt{(a, a)}| = i_0, \quad |\sqrt{(b, b)}| = i_1, \quad |\sqrt{(c, c)}| = i_2.$$

S. 251 ZZ. 17 und 18 v. u. lese man:
Grundpunkte anstatt „Grenzpunkte".

$$(26.) \qquad \varkappa_1 k_1 + \varkappa_2 k_2 + \varkappa_3 k_3 + \varkappa_4 k_4 = 0,$$

$$(26^a.) \qquad \varkappa_1 \varrho_1 \pm \varkappa_2 \varrho_2 \pm \varkappa_3 \varrho_3 \pm \varkappa_4 \varrho_4 = 0,$$

wobei die Gleichung (26ª.) die acht Ähnlichkeitsebenen in baryzentrischen Koordinaten $\varkappa_1 : \varkappa_2 : \varkappa_3 : \varkappa_4$ inbezug auf das Fundamentaltetraeder: $A_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ darstellt.

Alle Kugeln, welche vier Kugeln $k_i = 0$ unter gleichen oder supplementären Winkeln schneiden, gehen durch einen der acht Kreise, in welchen die Orthogonalkugel (23.) von den acht Ähnlichkeitsebenen (26ª.) getroffen wird.

Setzt man ferner in (18.) und (19.)

$$(27.) \qquad \begin{aligned} K &\equiv \varkappa_1 k_1 + \varkappa_2 k_2 + \varkappa_3 k_3 + \varkappa_4 k_4, \\ L &\equiv \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_3 + \lambda_4 k_4 \end{aligned}$$

und führt die Bezeichnung ein:

$$(27^a.) \qquad \omega(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4) \equiv \varkappa_1^2 (k_1 k_1) + 2\varkappa_1 \varkappa_2 (k_1 k_2) + \cdots + \varkappa_4^2 (k_4 k_4),$$

so ist

$$(27^b.) \qquad \cos(K, L) = \frac{\frac{1}{2}(\lambda_1 \omega'(\varkappa_1) + \lambda_2 \omega'(\varkappa_2) + \lambda_3 \omega'(\varkappa_3) + \lambda_4 \omega'(\varkappa_4))}{\sqrt{\omega(\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \varkappa_4)\ \omega(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)}}.$$

Damit also irgend zwei Kugeln des „Kugelgebüsches“ (16.) sich orthogonal schneiden, ist nötig und ausreichend, daß ihre Zentra harmonische Pole der Orthogonalkugel (23.) sind.

Zur Bestimmung der 16 Kugeln, welche fünf gegebene Kugeln unter gleichen oder supplementären Winkeln treffen, führt der weitere Satz:

Die zwanzig Potenzkugeln der fünf Kugeln $k_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ gehören einem der sechzehn „Kugelgebüsche“ an:

$$(28.)\qquad \begin{cases} \varkappa_1 k_1 + \varkappa_2 k_2 + \varkappa_3 k_3 + \varkappa_4 k_4 + \varkappa_5 k_5 = 0, \\ \varkappa_1 \varrho_1 \pm \varkappa_2 \varrho_2 \pm \varkappa_3 \varrho_3 \pm \varkappa_4 \varrho_4 \pm \varkappa_5 \varrho_5 = 0.^*) \end{cases}$$

Zusatz. Für drei Kreise

$$(29.)\qquad k_i \equiv (x-a_i)^2 + (y-b_i)^2 - r_i^2 = 0$$

in der Ebene des orthogonalen Koordinatensystems x, y hat man die analogen Sätze. Alle Kreise, welche drei gegebene Kreise unter gleichen oder supplementären Winkeln schneiden, gehen durch eines der vier Schnittpunktepaare der vier Ähnlichkeitsachsen

$$(29^a.)\qquad \varkappa_1 \varrho^{(1)} \pm \varkappa_2 \varrho^{(2)} \pm \varkappa_3 \varrho^{(3)} = 0, \qquad \varrho^{(i)} = |\sqrt{(k_i, k_i)}|, \qquad (i=1,2,3)$$

(vgl. *Hesse*, Analyt. Geom. der Ebene 4. Aufl. 1906 S. 247 ff.) mit dem Orthogonalkreis

$$(29^b.)\qquad \begin{cases} (1,1)\,\varkappa_1^2 + 2\,(1,2)\,\varkappa_1\varkappa_2 + \cdots + (3,3)\,\varkappa_3^2 = 0, \\ (\alpha, \beta) = (k_\alpha, k_\beta). \end{cases}$$

Die zwölf *Plücker*schen Kreise, welche im Apollonischen Problem auftreten und aus den drei gegebenen Kreisen $k_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ die Berührungspunkte zweier zugeordneten Apollonischen Kreise orthogonal ausschneiden, sind gegeben durch die Gleichungen

$$(29^c.)\qquad \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ (i,1) & (i,2) & (i,3 \\ \varrho_1 & \pm\varrho_2 & \pm\varrho_3 \end{vmatrix} = 0.^{**}) \qquad (i=1,2,3)$$

---

*) Rein synthetisch und unter völlig anderem Gesichtspunkte hat die letzten Theoreme teilweise Herr *Affolter* (Math. Ann. IV, 184—194) entwickelt.

**) Herr *Study* hat in seiner an Ergebnissen überreichen Arbeit „Das Apoll. Problem“ (Math. Ann. 49, 496—541) die Theorie der Mittelpunkte prinzipiell ausgeschlossen. Aus (29.) ergeben sich die von Herrn *Study* § 17 a. a. O. entwickelten Gruppierungen der *Plücker*schen Kreise von selbst.

Aus diesem System (29.) ergibt sich sofort das Theorem:

Das Zentrum eines *Plücker*schen Kreises, der einer bestimmten Ähnlichkeitsachse (etwa $\varkappa_1 \varrho_1 + \varkappa_2 \varrho_2 + \varkappa_3 \varrho_3 = 0$) zugeordnet ist und aus dem Kreise $k_i = 0$ die Berührungspunkte zweier zusammengehörigen Apollonischen Kreise orthogonal ausschneidet, ist der Schnittpunkt dieser Ähnlichkeitsachse mit der Polaren des Zentrums a_i, b_i in bezug auf den Orthogonalkreis.

Diese letztere Polare ist natürlich auch identisch mit der Polaren, welche das Zentrum des Orthogonalkreises in bezug auf den Kreis $k_i = 0$ besitzt.

Die hier gegebenen Andeutungen werden an anderer Stelle weiter ausgeführt werden.

Über einen Satz des Herrn *Poincaré.*

Von Herrn *Oskar Perron* in München.

§ 1.

Eine für die Argumente $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ definierte Funktion D_ν genüge der Differenzengleichung r-ter Ordnung

$$D_{\nu+r} + a_1^{(\nu)} D_{\nu+r-1} + a_2^{(\nu)} D_{\nu+r-2} + \cdots + a_r^{(\nu)} D_\nu = 0,$$

deren Koeffizienten $a_i^{(\nu)}$ mit wachsendem ν gegen gewisse Grenzwerte konvergieren sollen:

$$\lim_{\nu=\infty} a_i^{(\nu)} = a_i. \qquad (i = 1, 2, \ldots r)$$

Die Wurzeln der Gleichung

$$f(\varrho) \equiv \varrho^r + a_1 \varrho^{r-1} + a_2 \varrho^{r-2} + \cdots + a_r = 0$$

seien $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_r$, und wir setzen voraus:

$$(1.) \qquad |\varrho_1| > |\varrho_2| > \cdots > |\varrho_r|.$$

Dann besagt der Satz des Herrn *Poincaré,* den wir hier im Auge haben, daß der Grenzwert

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu}$$

existiert und einer der Wurzeln ϱ_i gleich ist*). „Im allgemeinen", sagt Herr *Poincaré*, ist der Grenzwert gleich der absolut größten Wurzel; nur „in Ausnahmefällen" wird er einer andern Wurzel gleich sein.

Nach dieser Ausdrucksweise könnte man meinen — und auch der *Poincaré*sche Beweis schließt diese Annahme nicht aus —, daß nur für geeignet spezialisierte Differenzengleichungen die Beziehung

$$\text{(a.)} \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} = \varrho_i, \qquad i > 1$$

bestehen kann, während, wenn die Koeffizienten die gedachten Spezialisierungen nicht aufweisen, stets

$$\text{(b.)} \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} = \varrho_1$$

ist. In Wahrheit verhält sich aber die Sache so, wie Herr *Poincaré* später auch richtig angegeben hat, daß bei *jeder* Differenzengleichung der angegebenen Art für das *allgemeine* Integral die Beziehung (b.) besteht, während allenfalls für gewisse *Partikulärintegrale* die Gleichung (a.) statthaben kann.

Ob nun aber diese *möglicherweise* vorhandenen Partikulärintegrale in jedem Fall auch *wirklich* existieren, ergibt sich natürlich aus dem *Poincaré*schen Beweisgang erst recht nicht. Daß diese Frage aber wirklich zu bejahen ist, hat unter Benutzung des *Poincaré*schen Resultates Herr *Pincherle* bewiesen, allerdings nur für den Fall, daß die Koeffizienten $a_i^{(\nu)}$ *rationale* Funktionen von ν sind und $a_r \neq 0$ ist. **). Insbesondere hat Herr *Pincherle* die Wichtigkeit des von ihm sogenannten „ausgezeichneten Integrals" hervorgehoben und seine Existenz bewiesen; es ist dies dasjenige

*) Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies. American journal of mathematics, vol. 7 (1885).

**) Sur la génération de systèmes récurrents au moyen d'une équation linéaire différentielle. Acta mathematica, 16 (1893).

bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmte Partikulärintegral, für welches der fragliche Grenzwert gleich der absolut kleinsten Wurzel wird.

Ich werde nun im folgenden zuerst den *Poincaré*schen Beweisgang etwas modifizieren und übersichtlicher gestalten, wobei jedoch mehr als bei Herrn *Poincaré* auch nicht herauskommen kann. Sodann aber werde ich noch einen zweiten Beweis liefern, der zwar komplizierter ist, aber sehr viel mehr leistet und insbesondere auch zu den Ergebnissen des Herrn *Pincherle* führt. Meine Methode ist aber viel direkter und der Sache angepaßter als die auf die Theorie der linearen Differentialgleichungen gestützte Methode des Herrn *Pincherle*, und sie macht außerdem die Einschränkung entbehrlich, daß die $a_i^{(\nu)}$ rationale Funktionen von ν sind, sowie daß $a_r \neq 0$ ist.

§ 2.

Wir schreiben die Differenzengleichung in der Form

$$D_{\nu+r} + (a_1 + z_1^{(\nu)})\, D_{\nu+r-1} + (a_2 + z_2^{(\nu)})\, D_{\nu+r-2} + \cdots + (a_r + z_r^{(\nu)})\, D_\nu = 0, \tag{2.}$$

sodaß also

$$\lim_{\nu=\infty} z_i^{(\nu)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots r) \tag{3.}$$

ist. Dann führen wir für jedes ν mit Herrn *Poincaré* r Zahlen $X_1^{(\nu)}$, $X_2^{(\nu)}, \cdots X_r^{(\nu)}$ ein vermittelst der r Gleichungen

$$\begin{aligned} D_\nu &= X_1^{(\nu)} + X_2^{(\nu)} + \cdots + X_r^{(\nu)}, \\ D_{\nu+1} &= \varrho_1 X_1^{(\nu)} + \varrho_2 X_2^{(\nu)} + \cdots + \varrho_r X_r^{(\nu)}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_{\nu+r-1} &= \varrho_1^{r-1} X_1^{(\nu)} + \varrho_2^{r-1} X_2^{(\nu)} + \cdots + \varrho_r^{r-1} X_r^{(\nu)}, \end{aligned} \tag{4.}$$

deren Determinante wegen der Annahme (1.) ja nicht verschwindet. Schreibt man $\nu+1$ statt ν, so kommt:

$$
\begin{aligned}
D_{\nu+1} &= X_1^{(\nu+1)} + X_2^{(\nu+1)} + \cdots + X_r^{(\nu+1)}, \\
D_{\nu+2} &= \varrho_1 X_1^{(\nu+1)} + \varrho_2 X_2^{(\nu+1)} + \cdots + \varrho_r X_r^{(\nu+1)}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
D_{\nu+r} &= \varrho_1^{r-1} X_1^{(\nu+1)} + \varrho_2^{r-1} X_2^{(\nu+1)} + \cdots + \varrho_r^{r-1} X_r^{(\nu+1)}.
\end{aligned} \tag{5.}
$$

Nun setzen wir

$$f(\varrho) \equiv \varrho^r + a_1 \varrho^{r-1} + \cdots + a_r \equiv (\varrho - \varrho_i)\,(\varrho^{r-1} + b_1 \varrho^{r-2} + \cdots + b_{r-1}),$$

wo die b natürlich noch vom Index i abhängen; es ist dann

$$
\begin{aligned}
a_1 &= b_1 - \varrho_i, \\
a_2 &= b_2 - \varrho_i b_1, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{r-1} &= b_{r-1} - \varrho_i b_{r-2}, \\
a_r &= -\varrho_i b_{r-1}.
\end{aligned}
$$

Multipliziert man die Gleichungen (5.) der Reihe nach mit b_{r-1}, $b_{r-2}, \cdots b_1$, 1 und addiert sie dann, so kommt

$$b_{r-1} D_{\nu+1} + b_{r-2} D_{\nu+2} + \cdots + b_1 D_{\nu+r-1} + D_{\nu+r} = f'(\varrho_i)\, X_i^{(\nu+1)},$$

oder auch, wenn man für $D_{\nu+r}$ den Wert aus (2.) einsetzt:

$$
\begin{aligned}
f'(\varrho_i) X_i^{(\nu+1)} &= (b_1 - a_1 - \varkappa_1^{(\nu)}) D_{\nu+r-1} + \cdots + (b_{r-1} - a_{r-1} - \varkappa_{r-1}^{(\nu)}) D_{\nu+1} - (a_r + \varkappa_r^{(\nu)}) D_\nu \\
&= (\varrho_i - \varkappa_1^{(\nu)}) D_{\nu+r-1} + (\varrho_i b_1 - \varkappa_2^{(\nu)}) D_{\nu+r-2} + \cdots + (\varrho_i b_{r-1} - \varkappa_r^{(\nu)}) D_\nu \\
&= \varrho_i (D_{\nu+r-1} + b_1 D_{\nu+r-2} + \cdots + b_{r-1} D_\nu) - \sum_{s=1}^{r} \varkappa_s^{(\nu)} D_{\nu+r-s}.
\end{aligned}
$$

Substituiert man schließlich für die hier auftretenden D ihre Werte aus (4.), so erhält man:

$$f'(\varrho_i) X_i^{(\nu+1)} = \varrho_i f'(\varrho_i) X_i^{(\nu)} + \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_k^{(\nu)} X_k^{(\nu)},$$

wobei die $\varepsilon_k^{(\nu)}$ sich linear aus den $x_s^{(\nu)}$ zusammensetzen, also mit wachsendem ν gegen Null konvergieren. Da die r Wurzeln nach Annahme voneinander verschieden sind, so ergibt sich, indem man durch $f'(\varrho_i)$ dividiert, das System von Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
X_1^{(\nu+1)} &= \varrho_1 X_1^{(\nu)} + \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_{1k}^{(\nu)} X_k^{(\nu)}, \\
X_2^{(\nu+1)} &= \varrho_2 X_2^{(\nu)} + \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_{2k}^{(\nu)} X_k^{(\nu)}, \qquad (6.) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
X_r^{(\nu+1)} &= \varrho_r X_r^{(\nu)} + \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_{rk}^{(\nu)} X_k^{(\nu)},
\end{aligned}
$$

wobei die Beziehung statt hat:

$$
\lim_{\nu=\infty} \varepsilon_{ik}^{(\nu)} = 0. \qquad (7.) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots r)
$$

Nun schließen wir den trivialen Fall, daß alle D_ν von einem gewissen Index ν ab verschwinden, von der Betrachtung aus; dann ist für jedes ν auch mindestens eine der Zahlen $X_1^{(\nu)}, X_2^{(\nu)}, \ldots X_r^{(\nu)}$ von Null verschieden. Man kann daher aus der Reihe $1, 2, \ldots r$ einen Index j_ν derart auswählen, daß

$$
\begin{aligned}
&|X_{j_\nu}^{(\nu)}| > 0, \\
&|X_{j_\nu}^{(\nu)}| > |X_k^{(\nu)}| \text{ für } k < j_\nu, \qquad (8.) \\
&|X_{j_\nu}^{(\nu)}| \geqq |X_k^{(\nu)}| \text{ für } k > j_\nu
\end{aligned}
$$

ist; durch diese Forderung ist der Index j_ν für jedes ν offenbar eindeutig bestimmt.

Ich zeige nun zunächst, daß für genügend große ν stets $j_{\nu+1} \leqq j_\nu$ ist. Nach (1.) ist $\frac{|\varrho_k|}{|\varrho_i|} < 1$ für $i < k$; man kann also auch eine positive Zahl δ angeben, derart daß

$$
0 < \frac{|\varrho_k| + \delta}{|\varrho_i| - \delta} < 1 \text{ für } i < k
$$

ausfällt. Wird dann ν so groß gewählt, daß

$$|\varepsilon_{ik}^{(\nu)}| < \frac{\delta}{r}$$

ist, so folgt aus (6.) einerseits

$$|X_{j_\nu}^{(\nu+1)}| = \left|\varrho_{j_\nu} X_{j_\nu}^{(\nu)} + \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_{j_\nu k}^{(\nu)} X_k^{(\nu)}\right|$$

$$\geqq (|\varrho_{j_\nu}| - \delta)\,|X_{j_\nu}^{(\nu)}|\,;$$

anderseits aber auch

$$|X_{j_\nu+1}^{(\nu+1)}| = \left|\varrho_{j_\nu+1} X_{j_\nu+1}^{(\nu)} + \sum_{k=1}^{r} \varepsilon_{j_\nu+1\,k}^{(\nu)} X_k^{(\nu)}\right|$$

$$\leqq (|\varrho_{j_\nu+1}| + \delta)\cdot|X_{j_\nu}^{(\nu)}|).$$

Wenn nun $j_\nu < j_{\nu+1}$ wäre, so würde man durch Division dieser beiden Ungleichungen erhalten (da ja $X_{j_\nu}^{(\nu)} \neq 0$ ist):

$$\frac{|X_{j_\nu+1}^{(\nu+1)}|}{|X_{j_\nu}^{(\nu+1)}|} \leqq \frac{|\varrho_{j_\nu+1}| + \delta}{|\varrho_{j_\nu}| - \delta} < 1,$$

also

$$|X_{j_\nu+1}^{(\nu+1)}| < |X_{j_\nu}^{(\nu+1)}|,$$

was aber der Definition des Index $j_{\nu+1}$ widersprechen würde.

Daher muß für genügend große ν in der Tat $j_{\nu+1} \leqq j_\nu$ sein. Da aber alle j_ν nur einer der Zahlen $1, 2, \ldots r$ gleich sein können, so muß notwendig von einem gewissen Werte ν ab j_ν konstant bleiben. Es sei demgemäß $j_\nu = j$ für $\nu \geqq N$. Nach (8.) ist dann für $\nu \geqq N$:

$$
\begin{aligned}
&|X_j^{(\nu)}|>0,\\
&|X_j^{(\nu)}|>|X_k^{(\nu)}| \text{ für } k<j,\\
&|X_j^{(\nu)}|\geqq|X_k^{(\nu)}| \text{ für } k>j.
\end{aligned}
\tag{9.}
$$

Ich beweise jetzt weiter, daß notwendig

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{X_k^{(\nu)}}{X_j^{(\nu)}}=0 \text{ für } k\leqq j \tag{10.}$$

wird. Angenommen nämlich, es gäbe im Gegenteil einen Index k, für welchen

$$\limsup_{\nu=\infty}\frac{|X_k^{(\nu)}|}{|X_j^{(\nu)}|}=\alpha>0 \tag{10^a.}$$

ausfällt. Ist dann etwa $k<j$, so folgt aus (6.) und (9.):

$$
\begin{aligned}
|X_k^{(\nu+1)}|&\geqq|\varrho_k X_k^{(\nu)}|-\delta|X_j^{(\nu)}|,\\
|X_j^{(\nu+1)}|&\leqq|\varrho_j X_j^{(\nu)}|+\delta|X_j^{(\nu)}|,
\end{aligned}
$$

wo δ beliebig klein ist, wenn man nur ν genügend groß wählt. Also durch Division

$$\frac{|\varrho_k X_k^{(\nu)}|-\delta|X_j^{(\nu)}|}{|\varrho_j X_j^{(\nu)}|+\delta|X_j^{(\nu)}|}\leqq\frac{|X_k^{(\nu+1)}|}{|X_j^{(\nu+1)}|}<\alpha+\varepsilon,$$

wo auch ε wegen der Annahme (10^a.) eine beliebig kleine positive Zahl bedeuten kann. Aus dieser Ungleichung folgt

$$|\varrho_k X_k^{(\nu)}|-\delta|X_j^{(\nu)}|<(\alpha+\varepsilon)(|\varrho_j|+\delta)|X_j^{(\nu)}|,$$

oder auch

$$\frac{|X_k^{(\nu)}|}{|X_j^{(\nu)}|}<\frac{(\alpha+\varepsilon)(|\varrho_j|+\delta)+\delta}{|\varrho_k|}.$$

Anderseits ist aber nach der Annahme (10ª.) für geeignet gewählte ν auch

$$\frac{|X_k^{(\nu)}|}{|X_j^{(\nu)}|} > \alpha - \varepsilon,$$

sodaß man erhält:

$$\alpha - \varepsilon < \frac{(\alpha+\varepsilon)(|\varrho_j|+\delta)+\delta}{|\varrho_k|}.$$

Da wir aber $k<j$, also $|\varrho_j|<|\varrho_k|$ angenommen haben, so kann diese letzte Ungleichung nicht für beliebig kleine ε, δ bestehen. Für $k<j$ ist also die Annahme (10ª.) unzulässig. Ist aber zweitens $k>j$ in (10ª.), so folgt wieder aus (6.) und (9.):

$$|X_k^{(\nu+1)}| \leqq |\varrho_k X_k^{(\nu)}| + \delta |X_j^{(\nu)}|,$$
$$|X_j^{(\nu+1)}| \geqq |\varrho_j X_j^{(\nu)}| - \delta |X_j^{(\nu)}|;$$

also durch Division*):

$$\frac{|\varrho_k X_k^{(\nu)}| + \delta |X_j^{(\nu)}|}{|\varrho_j X_j^{(\nu)}| - \delta |X_j^{(\nu)}|} \geqq \frac{|X_k^{(\nu+1)}|}{|X_j^{(\nu+1)}|}.$$

Nach der Annahme (10ª.) ist aber der rechts stehende Quotient für geeignet gewählte ν größer als $\alpha-\varepsilon$. Daher

$$|\varrho_k X_k^{(\nu)}| + \delta |X_j^{(\nu)}| \geqq (\alpha-\varepsilon)(|\varrho_j|-\delta)|X_j^{(\nu)}|,$$

oder auch

$$|\varrho_k| \frac{|X_k^{(\nu)}|}{|X_j^{(\nu)}|} \geqq (\alpha-\varepsilon)(|\varrho_j|-\delta)-\delta.$$

---

*) Hierbei ist zu beachten, daß wegen $k>j$ gewiß $|\varrho_j|>|\varrho_k|$, also $|\varrho_j|>0$ ist. Daher kann auch $|\varrho_j|-\delta>0$ angenommen werden. $|\varrho_r|>0$ wird dagegen nicht vorausgesetzt.

Andererseits ist aber auch nach (10ª.)

$$\frac{|X_k^{(\nu)}|}{|X_j^{(\nu)}|} < \alpha + \varepsilon ,$$

sodaß sich ergibt:

$$|\varrho_k|(\alpha+\varepsilon) \geqq (\alpha-\varepsilon)(|\varrho_j|-\delta)-\delta ,$$

eine Ungleichung, die aber wegen $k>j$, also $|\varrho_j|>|\varrho_k|$ wieder nicht für beliebig kleine ε, δ besteht. Also ist auch für $k>j$ die Annahme (10ª.) unzulässig, womit die Gleichung (10.) vollständig bewiesen ist.

Vermöge (10.) folgt aber sofort aus den zwei ersten der Gleichungen (4.):

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_\nu}{X_j^{(\nu)}} = 1 , \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{X_j^{(\nu)}} = \varrho_j ,$$

und daher durch Division

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} = \varrho_j , \tag{11.}$$

womit der *Poincaré*sche Satz bereits bewiesen ist. Welche der Wurzeln $\varrho_1, \ldots \varrho_r$ bei Gleichung (11.) in Frage kommt, ergibt sich aus diesem Beweise nicht. Insbesondere erscheint es mir bei der Art, wie der Index j gewonnen wurde, doch sehr gewagt, solange keine andern Gründe dafür sprechen, zu behaupten, daß „im allgemeinen“ $j=1$ ist. Das wird sich erst aus unserm zweiten Beweise einwandfrei ergeben. In *einem* Punkte aber leistet auch dieser erste Beweis mehr wie der folgende. Es wird nämlich nirgends vorausgesetzt, daß der letzte Koeffizient unserer Differenzengleichung von Null verschieden ist. Vielmehr darf sehr wohl für einzelne ν auch $a_r + \varkappa_r^{(\nu)} = 0$ sein; und wenn etwa $\varrho_r = 0$, also $a_r = 0$ ist, so kann diese Eventualität sogar für unendlich viele Werte von ν eintreten, ohne daß der Beweis hinfällig wird. Stets muß, wenn nur die Zahlen D_ν rekursorisch aus (2.) berechnet werden, die Gleichung (11.) bestehen.

§ 3.

Von jetzt ab setzen wir voraus, daß der letzte Koeffizient der Differenzengleichung (2.) für alle ν ($\nu = 0, 1, 2, \ldots$) von Null verschieden ist. Zwar darf $a_r = 0$, also $\varrho_r = 0$ sein; aber dann ist dauernd $x_r^{(\nu)} \neq 0$. Der jetzt zu beweisende Satz läßt sich dann folgendermaßen formulieren:

Die Differenzengleichung hat r unabhängige Partikulärintegrale $D_\nu^{(1)}$, $D_\nu^{(2)}, \ldots D_\nu^{(r)}$ *von der Art, daß die Beziehungen gelten:*

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}^{(i)}}{D_\nu^{(i)}} = \varrho_i . \qquad (i=1, 2, \ldots r) \tag{12.}$$

Hieraus folgt dann weiter, daß für das *allgemeine* Integral, das sich ja in der Form

$$D_\nu = c_1 D_\nu^{(1)} + c_2 D_\nu^{(2)} + \cdots + c_r D_\nu^{(r)}$$

darstellen läßt,

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} = \varrho_1$$

ist, sofern nur $c_1 \neq 0$; und für ein Partikulärintegral der ∞^{r+1-j}-fachen Schar

$$D_\nu = c_j D_\nu^{(j)} + c_{j+1} D_\nu^{(j+1)} + \cdots + c_r D_\nu^{(r)} \qquad (c_j \neq 0)$$

gilt die Beziehung

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}}{D_\nu} = \varrho_j .$$

Bedeutet nämlich δ wieder eine positive Zahl, für welche

$$0 < \frac{|\varrho_k| + \delta}{|\varrho_i| - \delta} < 1 \text{ für } i < k$$

ist, so folgt aus (12.), daß bei genügend großem ν

$$|D_{\nu+1}^{(j)}| \begin{cases} < (|\varrho_j| + \delta)|D_\nu^{(j)}|, \\ > (|\varrho_j| - \delta)|D_\nu^{(j)}|, \end{cases}$$

also auch für $i < k$:

$$|D_\nu^{(k)}| < C\ (|\varrho_k| + \delta)^\nu,$$

$$|D_\nu^{(i)}| > C_1 (|\varrho_i| - \delta)^\nu > 0$$

wird, wo C, C_1 von ν nicht abhängen. Hieraus durch Division

$$\frac{|D_\nu^{(k)}|}{|D_\nu^{(i)}|} < \frac{C}{C_1}\left(\frac{|\varrho_k| + \delta}{|\varrho_i| - \delta}\right)^\nu,$$

also endlich nach der obigen Festsetzung über die Zahl δ:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{D_\nu^{(k)}}{D_\nu^{(i)}} = 0 \qquad \text{für } i < k.$$

Daraus folgt dann aber auch

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{c_j D_\nu^{(j)} + c_{j+1} D_\nu^{(j+1)} + \cdots + c_r D_\nu^{(r)}}{D_\nu^{(j)}} = c_j \neq 0.$$

Dividiert man endlich durch diese Gleichung diejenige, welche aus ihr hervorgeht, wenn man ν ersetzt durch $\nu + 1$, so kommt unter Berücksichtigung von (12.):

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{c_j D_{\nu+1}^{(j)} + c_{j+1} D_{\nu+1}^{(j+1)} + \cdots + c_r D_{\nu+1}^{(r)}}{c_j D_\nu^{(j)} + c_{j+1} D_\nu^{(j+1)} + \cdots + c_r D_\nu^{(r)}} = \varrho_j. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

Um nun den Beweis unseres Theorems in Angriff zu nehmen, beachte man, daß es für Differenzengleichungen erster Ordnung ja evident

ist. Wir werden dann den allgemeinen Beweis durch vollständige Induktion führen, nehmen also an, daß für die $(r-1)$-te Ordnung die Sache schon bewiesen sei. Man setze dann

$$(13.)\quad f(\varrho)\equiv\varrho^r+a_1\varrho^{r-1}+\cdots+a_r\equiv(\varrho-\varrho_1)(\varrho^{r-1}+b_1\varrho^{r-2}+\cdots+b_{r-1}),$$

sodaß wieder

$$(14.)\qquad a_1=b_1-\varrho_1,\quad a_2=b_2-\varrho_1 b_1,\quad \ldots, a_r=-\varrho_1 b_{r-1}$$

ist und suche dann die Differenzengleichung (2.) auf die Form zu bringen:

$$(15.)\quad [D_{\nu+r}-(\varrho_1+\delta_{\nu+r-1})D_{\nu+r-1}]+(b_1+\varepsilon_1^{(\nu)})[D_{\nu+r-1}-(\varrho_1+\delta_{\nu+r-2})D_{\nu+r-2}]$$
$$+\cdots+(b_{r-1}+\varepsilon_{r-1}^{(\nu)})[D_{\nu+1}-(\varrho_1+\delta_\nu)D_\nu]=0.$$

Zur Übereinstimmung von (2.) mit (15.) ist offenbar nur erforderlich:

$$(16.)\quad \begin{aligned}
&-(\varrho_1+\delta_{\nu+r-1})+(b_1+\varepsilon_1^{(\nu)})=a_1+\varkappa_1^{(\nu)},\\
&-(b_1+\varepsilon_1^{(\nu)})(\varrho_1+\delta_{\nu+r-2})+(b_2+\varepsilon_2^{(\nu)}=a_2+\varkappa_2^{(\nu)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-(b_{r-2}+\varepsilon_{r-2}^{(\nu)})(\varrho_1+\delta_{\nu+1})+(b_{r-1}+\varepsilon_{r-1}^{(\nu)})=a_{r-1}+\varkappa_{r-1}^{(\nu)},\\
&-(b_{r-1}+\varepsilon_{r-1}^{(\nu)})(\varrho_1+\delta_\nu)\qquad\qquad\qquad\qquad=a_r+\varkappa_r^{(\nu)},
\end{aligned}$$

ein Gleichungssystem, das sich wegen (14.) auch folgendermaßen schreiben läßt:

$$(17.)\quad \begin{aligned}
&\varepsilon_1^{(\nu)}=\varkappa_1^{(\nu)}+\delta_{\nu+r-1},\\
&\varepsilon_2^{(\nu)}-(\varrho_1+\delta_{\nu+r-2})\varepsilon_1^{(\nu)}=\varkappa_2^{(\nu)}+b_1\delta_{\nu+r-2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varepsilon_{r-1}^{(\nu)}-(\varrho_1+\delta_{\nu+1})\varepsilon_{r-2}^{(\nu)}=\varkappa_{r-1}^{(\nu)}+b_{r-2}\delta_{\nu+1},\\
&-(\varrho_1+\delta_\nu)\varepsilon_{r-1}^{(\nu)}=\varkappa_r^{(\nu)}+b_{r-1}\delta_\nu.
\end{aligned}$$

Ich werde nun im folgenden Paragraphen den nicht leichten Nach-

weis führen, *daß diese unendlich vielen Gleichungen (nämlich für* $\nu = 0, 1, 2, \ldots$*) durch solche Werte* $\varepsilon_i^{(\nu)}$, δ_ν *befriedigt werden können, für welche*

$$\lim_{\nu=\infty} \delta_\nu = 0, \tag{18.}$$

$$\lim_{\nu=\infty} \varepsilon_i^{(\nu)} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots r-1) \tag{19.}$$

wird. Nimmt man dies vorläufig als bewiesen an, und setzt man zur Abkürzung

$$(\varrho_1 + \delta_\nu) D_\nu - D_{\nu+1} = E_\nu, \tag{20.}$$

so geht (15.), also auch (2.) über in

$$E_{\nu+r-1} + (b_1 + \varepsilon_1^{(\nu)}) E_{\nu+r-2} + \cdots + (b_{r-1} + \varepsilon_{r-1}^{(\nu)}) E_\nu = 0. \tag{21.}$$

Das ist aber eine Differenzengleichung $(r-1)$-ter Ordnung, deren letzter Koeffizient wegen der letzten Gleichung (16.) für alle ν von Null verschieden ist. Für diese gilt daher infolge von (19.) und weil die Wurzeln der Gleichung

$$\varrho^{r-1} + b_1 \varrho^{r-2} + \cdots + b_r = 0$$

$\varrho_2, \varrho_3, \cdots \varrho_r$ sind, nach Voraussetzung bereits unser Satz; also hat sie $r-1$ unabhängige Integrale $E_\nu^{(2)}$, $E_\nu^{(3)}, \ldots E_\nu^{(r)}$, für welche

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{E_{\nu+1}^{(i)}}{E_\nu^{(i)}} = \varrho_i \qquad (i = 2, 3, \ldots r) \tag{22.}$$

ist. Aus dem *Cauchy*schen Kriterium zweiter Art ergibt sich dann mit Rücksicht auf (18.), daß die $r-1$ Reihen

$$D_\nu^{(i)} = \frac{E_\nu^{(i)}}{\varrho_1 + \delta_\nu} + \frac{E_{\nu+1}^{(i)}}{(\varrho_1 + \delta_\nu)(\varrho_1 + \delta_{\nu+1})} + \frac{E_{\nu+2}^{(i)}}{(\varrho_1 + \delta_\nu)(\varrho_1 + \delta_{\nu+1})(\varrho_1 + \delta_{\nu+2})} + \cdots \qquad (i = 2, 3, \ldots r) \tag{23.}$$

konvergieren*). Die so definierten Zahlen $D_\nu^{(i)}$ genügen aber offenbar der Gleichung

$$(\varrho_1 + \delta_\nu)\, D_\nu^{(i)} - D_{\nu+1}^{(i)} = E_\nu^{(i)}.$$

Setzt man also $D_\nu^{(i)}$ an Stelle von D_ν in die linke Seite der Gleichung (15.), so erhält diese den Wert

$$-[E_{\nu+r-1}^{(i)} + (b_1 + \varepsilon_1^{(\nu)})\, E_{\nu+r-2}^{(i)} + \cdots + (b_{r-1} + \varepsilon_{r-1}^{(\nu)})\, E_\nu^{(i)}],$$

das heißt den Wert Null, weil ja $E_\nu^{(i)}$ ein Integral von (21.) ist. Daher sind $D_\nu^{(2)}, D_\nu^{(3)}, \cdots D_\nu^{(r)}$ Integrale von (15.), also auch von (2.). Ein weiteres Integral ist aber offenbar

$$(24.) \qquad D_\nu^{(1)} = (\varrho_1 + \delta_0)(\varrho_1 + \delta_1)\cdots(\varrho_1 + \delta_{\nu-1}) \neq 0 \qquad (D_0^{(1)} = 1);$$

denn für dieses verschwinden schon die einzelnen eckigen Klammern in (15.)

Nun bleibt noch zu beweisen, daß die Integrale $D_\nu^{(1)}, D_\nu^{(2)}, \ldots D_\nu^{(r)}$ von einander unabhängig sind und daß

$$(25.) \qquad \lim_{\nu=\infty} \frac{D_{\nu+1}^{(i)}}{D_\nu^{(i)}} = \varrho_i$$

ist. Für $i = 1$ folgt aber (25.) ohne weiteres aus (24.) Für $i > 1$ beachte man, daß für große ν wegen (22.) $E_\nu^{(i)} \neq 0$ ist; man kann also die Gleichung (23.) durch $E_\nu^{(i)}$ dividieren und erhält

$$(26.) \qquad \frac{D_\nu^{(i)}}{E_\nu^{(i)}} = \frac{1}{\varrho_1 + \delta_\nu} + \frac{\dfrac{E_{\nu+1}^{(i)}}{E_\nu^{(i)}}}{(\varrho_1 + \delta_\nu)(\varrho_1 + \delta_{\nu+1})} + \frac{\dfrac{E_{\nu+2}^{(i)}}{E_\nu^{(i)}}}{(\varrho_1 + \delta_\nu)(\varrho_1 + \delta_{\nu+1})(\varrho_1 + \delta_{\nu+2})} + \cdots.$$

---

*) Daß die auftretenden Nenner $\varrho_1 + \delta_\nu$ alle von Null verschieden sind, lehrt die letzte der Gleichungen (16.).

Bedeutet dann δ wieder eine positive Zahl, für welche

$$0<\frac{|\varrho_i|+\delta}{|\varrho_1|-\delta}<1$$

ist, so gibt es nach (22.) eine Zahl N, derart daß für $\nu \geqq N$

$$\left|\frac{E^{(i)}_{\nu+1}}{E^{(i)}_{\nu}}\right|<|\varrho_i|+\delta,$$

also auch

$$\left|\frac{E^{(i)}_{\nu+\mu}}{E^{(i)}_{\nu}}\right|<(|\varrho_i|+\delta)^{\mu},$$

und nach (18.)

$$|\delta_\nu|<\delta$$

ist. Wählt man daher in der Reihe (26.) $\nu \geqq N$ und bricht die Reihe beim μ-ten Gliede ab, so wird der fehlende Rest absolut kleiner als

$$\frac{(|\varrho_i|+\delta)^{\mu}}{(|\varrho_1|-\delta)^{\mu+1}}+\frac{(|\varrho_i|+\delta)^{\mu+1}}{(|\varrho_1|-\delta)^{\mu+2}}+\cdots=\left(\frac{|\varrho_i|+\delta}{|\varrho_1|-\delta}\right)^{\mu}\frac{1}{|\varrho_1|-|\varrho_i|-2\delta}.$$

Daraus folgt aber sofort, daß man den Grenzwert der Reihe (26.) für $\nu=\infty$ erhält, indem man in den einzelnen Gliedern zur Grenze übergeht, wodurch sich ergibt

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{D^{(i)}_{\nu}}{E^{(i)}_{\nu}}=\frac{1}{\varrho_1}+\frac{\varrho_i}{\varrho_1^2}+\frac{\varrho_i^2}{\varrho_1^3}+\cdots=\frac{1}{\varrho_1-\varrho_i}.$$

Dividiert man durch diese Gleichung wieder diejenige, welche daraus entsteht, wenn man ν durch $\nu+1$ ersetzt, so kommt unter Berücksichtigung von (22.)

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{D^{(i)}_{\nu+1}}{D^{(i)}_{\nu}}=\varrho_i\,,$$

womit die Gleichung (25.) bewiesen ist. Daraus folgt aber auch sogleich die lineare Unabhängigkeit unserer Integrale. Denn hätte man etwa identisch

$$c_j D_\nu^{(j)} + c_{j+1} D_\nu^{(j+1)} + \cdots + c_r D_\nu^{(r)} = 0, \qquad (c_j \neq 0)$$

so würde genau wie auf S. 27 aus (25.) folgen:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{c_j D_\nu^{(j)} + c_{j+1} D_\nu^{(j+1)} + \cdots + c_r D_\nu^{(r)}}{D_\nu^{(j)}} = c_j,$$

sodaß, weil der Zähler identisch verschwindet, auch $c_j = 0$ sein müßte gegen die Voraussetzung.

§ 4.

Es bleibt jetzt noch der Beweis nachzutragen, daß das Gleichungssystem (17.) sich durch solche δ_ν, $\varepsilon_i^{(\nu)}$ befriedigen läßt, für welche

$$\lim_{\nu=\infty} \delta_\nu = 0, \quad \lim_{\nu=\infty} \varepsilon_i^{(\nu)} = 0$$

wird. Nun ergibt sich aus dem System (17.) durch Elimination von $\varepsilon_1^{(\nu)}, \varepsilon_2^{(\nu)}, \ldots \varepsilon_{r-1}^{(\nu)}$:

$$(27.) \quad \begin{aligned} 0 = \varkappa_1^{(\nu)} + \delta_{\nu+r-1} + \frac{\varkappa_2^{(\nu)} + b_1 \delta_{\nu+r-2}}{\varrho_1 + \delta_{\nu+r-2}} + \frac{\varkappa_3^{(\nu)} + b_2 \delta_{\nu+r-3}}{(\varrho_1 + \delta_{\nu+r-2})(\varrho_1 + \delta_{\nu+r-3})} \\ + \cdots + \frac{\varkappa_r^{(\nu)} + b_{r-1} \delta_\nu}{(\varrho_1 + \delta_{\nu+r-2})(\varrho_1 + \delta_{\nu+r-3}) \cdots (\varrho_1 + \delta_\nu)}. \end{aligned}$$

Wenn es gelingt, die Zahlen δ_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ diesen Gleichungen gemäß zu bestimmen mit der Maßgabe, daß

$$\lim_{\nu=\infty} \delta_\nu = 0$$

wird, so ergeben sich die $\varepsilon_1^{(\nu)}, \ldots \varepsilon_{r-1}^{(\nu)}$ sukzessive aus (17.), und offenbar wird

dann wegen $\lim x_i^{(\nu)} = 0$ ganz von selbst auch $\lim \varepsilon_i^{(\nu)} = 0$. Wir brauchen uns also nur noch um die Gleichung (27.) zu bekümmern.

Führt man die Abkürzungen ein:

$$\delta_{\nu+1} - \frac{\varrho_2 \delta_\nu}{\varrho_1 + \delta_\nu} = \delta^{(1)}_{\nu+1},$$

$$\delta^{(1)}_{\nu+1} - \frac{\varrho_3 \delta^{(1)}_\nu}{\varrho_1 + \delta_\nu} = \delta^{(2)}_{\nu+1}, \tag{28.}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\delta^{(r-2)}_{\nu+1} - \frac{\varrho_r \delta^{(r-2)}_\nu}{\varrho_1 + \delta_\nu} = \delta^{(r-1)}_{\nu+1},$$

so hängt offenbar $\delta^{(1)}_{\nu+1}$ ab von δ_ν, $\delta_{\nu+1}$; ebenso $\delta^{(2)}_{\nu+2}$ von δ_ν, $\delta_{\nu+1}$, $\delta_{\nu+2}$; ... schließlich $\delta^{(r-1)}_{\nu+r-1}$ von δ_ν, $\delta_{\nu+1}$, ... $\delta_{\nu+r-1}$. Und zwar findet man durch leichte Rechnung sukzessive:

$$\delta^{(1)}_{\nu+1} = \delta_{\nu+1} - \frac{\varrho_2 \delta_\nu}{\varrho_1 + \delta_\nu},$$

$$\delta^{(2)}_{\nu+2} = \delta_{\nu+2} - \frac{(\varrho_2 + \varrho_3)\delta_{\nu+1}}{\varrho_1 + \delta_{\nu+1}} + \frac{\varrho_2 \varrho_3 \delta_\nu}{(\varrho_1 + \delta_{\nu+1})(\varrho_1 + \delta_\nu)}, \tag{29.}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\delta^{(r-1)}_{\nu+r-1} = \delta_{\nu+r-1} + \frac{b_1 \delta_{\nu+r-2}}{\varrho_1 + \delta_{\nu+r-2}} + \frac{b_2 \delta_{\nu+r-3}}{(\varrho_1 + \delta_{\nu+r-2})(\varrho_1 + \delta_{\nu+r-3})}$$

$$+ \cdots + \frac{b_{r-1} \delta_\nu}{(\varrho_1 + \delta_{\nu+r-2})(\varrho_1 + \delta_{\nu+r-3}) \cdots (\varrho_1 + \delta)},$$

wobei in der letzten Gleichung von den aus

$$\varrho^{r-1} + b_1 \varrho^{r-2} + \cdots + b_r \equiv (\varrho - \varrho_2)(\varrho - \varrho_3) \cdots (\varrho - \varrho_r)$$

fließenden Beziehungen

$$b_1 = -(\varrho_2 + \varrho_3 + \cdots + \varrho_r),$$
$$b_2 = \varrho_2\varrho_3 + \varrho_2\varrho_4 + \cdots + \varrho_{r-1}\varrho_r,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_{r-1} = (-1)^{r-1}\varrho_2\varrho_3\cdots\varrho_r$$

Gebrauch gemacht ist. Subtrahiert man die letzte der Gleichungen (29.) von (27.), so folgt noch

$$(30.)\quad -\delta_{\nu+r-1}^{(r-1)} = \varkappa_1^{(\nu)} + \frac{\varkappa_2^{(\nu)}}{\varrho_1+\delta_{\nu+r-2}} + \cdots + \frac{\varkappa_r^{(\nu)}}{(\varrho_1+\delta_{\nu+r-2})(\varrho_1+\delta_{\nu+r-3})\cdots(\varrho_1+\delta_\nu)}.$$

Weiter ergibt sich durch Addition der $r-i$ letzten Gleichungen (28.):

$$(31.)\quad \delta_{\nu+1}^{(i-1)} - \frac{\varrho_{i+1}\delta_\nu^{(i-1)} + \varrho_{i+2}\delta_\nu^{(i)} + \cdots + \varrho_r\delta_\nu^{(r-2)}}{\varrho_1+\delta_\nu} = \delta_{\nu+1}^{(r-1)}, \quad (i=1,2,\ldots r-1)$$

wobei $\delta_\nu^{(0)} = \delta_\nu$ zu setzen ist.

Nun bedeute η_0 irgend eine positive Zahl, die kleiner ist als $|\varrho_1|-|\varrho_2|$. Dann lassen sich der Reihe nach auch positive Zahlen η_1, $\eta_2, \cdots \eta_{r-1}$ angeben, die den Ungleichungen

$$(32.)\quad \begin{aligned} \eta_1 &< \eta_0 - \frac{|\varrho_2|\eta_0}{|\varrho_1|-\eta_0}, \\ \eta_2 &< \eta_1 - \frac{|\varrho_3|\eta_1}{|\varrho_1|-\eta_0}, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \eta_{r-1} &< \eta_{r-2} - \frac{|\varrho_r|\eta_{r-2}}{|\varrho_1|-\eta_0} \end{aligned}$$

genügen. Durch Addition der $r-i$ letzten dieser Ungleichungen folgt noch:

$$(33.)\quad \eta_{r-1} < \eta_{i-1} - \frac{|\varrho_{i+1}|\eta_{i-1} + |\varrho_{i+2}|\eta_i + \cdots + |\varrho_r|\eta_{r-2}}{|\varrho_1|-\eta_0}. \quad (i=1,2,\ldots r-1)$$

Da die $\varkappa_i^{(\nu)}$ für $\nu=\infty$ den Grenzwert Null haben, so läßt sich ein Index N angeben von der Art, daß für $\nu \geqq N$ durchweg

$$(34.)\quad |\varkappa_i^{(\nu)}| + \frac{|\varkappa_2^{(\nu)}|}{|\varrho_1|-\eta_0} + \frac{|\varkappa_3^{(\nu)}|}{(|\varrho_1|-\eta_0)^2} + \cdots + \frac{|\varkappa_r^{(\nu)}|}{(|\varrho_1|-\eta_0)^{r-1}} < \eta_{r-1}$$

wird. Wir wählen dann die $r-1$ Zahlen δ_N, $\delta_{N+1}, \ldots \delta_{N+r-2}$ irgendwie in der Weise, daß sie den Ungleichungen genügen:

$$(35.)\quad |\delta_N| < \eta_0, |\delta_{N+1}| < \eta_0, \ldots |\delta_{N+r-2}| < \eta_0,$$
$$|\delta_{N+r-2}^{(i)}| < \eta_i, \qquad (i=1, 2, \ldots r-2)$$

wobei die $\delta_{N+r-2}^{(i)}$ die durch (29.) definierten linearen homogenen Funktionen von δ_N, $\delta_{N+1}, \ldots \delta_{N+r-2}$ sind, und wir wollen untersuchen, ob, von diesen Anfangswerten ausgehend, die Gleichung (27.) für alle ν befriedigt werden kann, derart, daß $\lim \delta_\nu = 0$ wird.

Offenbar lassen sich die Zahlen $\delta_N, \delta_{N+1}, \ldots \delta_{N+r-2}$ in dem angegebenen Spielraum noch dergestalt wählen, daß die vorhergehenden $\delta_{N-1}, \delta_{N-2}, \ldots \delta_0$ aus (27.) sukzessive berechnet werden können. Denn dies kommt doch augenscheinlich nur darauf hinaus, daß diese $r-1$ Zahlen einer endlichen Anzahl von nicht identischen algebraischen Gleichungen *nicht* genügen dürfen*). Es handelt sich dann aber vor allem um die Abschätzung der δ_ν für $\nu > N+r-2$. Man erhält zunächst aus (30.), (35.), (34.) für $\nu = N$:

$$(36.)\quad |\delta_{N+r-1}^{(r-1)}| < \eta_{r-1}.$$

Sodann aus (31.) für $\nu = N+r-2$ und aus (35.)

$$|\delta_{N+r-1}^{(i-1)}| < |\delta_{N+r-1}^{(r-1)}| + \frac{|\varrho_{i+1}|\eta_{i-1} + |\varrho_{i+2}|\eta_i + \cdots + |\varrho_r|\eta_{r-2}}{|\varrho_1|-\eta_0}, \qquad (i=1, 2, \cdots r-1)$$

---

*) Man könnte übrigens von dieser Vorsichtsmaßregel absehen, indem man einfach die Gleichung (27.) und folglich das System (17.) nur für $\nu \geqq N$ studiert. Die Entwicklungen des vorigen Paragraphen würden dann die Integrale $D_\nu^{(i)}$ auch nur für $\nu \geqq N$ liefern. Aber die fehlenden Anfangswerte

$$D_{N-1}^{(i)}, D_{N-2}^{(i)}, \cdots D_0^{(i)}$$

können dann ja leicht aus der Differenzengleichung (2.) selbst sukzessive ergänzt werden, weil ja stets $a_r + \varkappa_r^{(\nu)} \neq 0$ ist.

woraus nach (36.) und (33.) weiter folgt:

$$|\delta_{N+r-1}^{(i-1)}| < \eta_{r-1} + \eta_{i-1} - \eta_{r-1} = \eta_{i-1}. \qquad (i = 1, 2, \cdots r-1)$$

Dies besagt aber, daß die Ungleichungen (35.) richtig bleiben, wenn der Index N um eine Einheit erhöht wird. Die Wiederholung des gleichen Prozesses führt dann zu einer abermaligen Erhöhung, u. s. f. Allgemein darf also in (35.) der Index N durch irgend einen größeren ersetzt werden, sodaß man insbesondere für alle $\nu \geqq N$ erhält:

$$|\delta_\nu| < \eta_0. \tag{37.}$$

Somit haben die $|\delta_\nu|$ gewiß einen *endlichen* oberen Limes; daß dieser nur Null sein kann, ist noch zu zeigen. Nehmen wir also an, es sei

$$\limsup |\delta_\nu| = \alpha > 0.$$

Wegen (37.) ist natürlich $\alpha \leqq \eta_0$, und die erste der Gleichungen (28.) lehrt dann, daß auch $|\delta_\nu^{(1)}|$ einen *positiven* oberen Limes hat. Alsdann ergibt sich aber aus der zweiten der Gleichungen (28.) ein gleiches für $|\delta_\nu^{(2)}|$ usw. Schließlich aus der letzten der Gleichungen (28.) auch:

$$\limsup |\delta_\nu^{(r-1)}| > 0.$$

Im Gegensatz hierzu ergibt sich aber aus (30.) und (37.)

$$|\delta_{\nu+r-1}^{(r-1)}| < |x_1^{(\nu)}| + \frac{|x_2^{(\nu)}|}{|\varrho_1| - \eta_0} + \frac{|x_3^{(\nu)}|}{(|\varrho_1| - \eta_0)^2} + \cdots + \frac{|x_r^{(\nu)}|}{(|\varrho_1| - \eta_0)^{r-1}},$$

und folglich

$$\lim \delta_\nu^{(r-1)} = 0.$$

Wegen dieses Widerspruches ist die Annahme, daß $|\delta_\nu|$ einen *positiven* oberen Limes haben könnte, unzulässig, und es folgt notwendig:

$$\lim_{\nu=\infty} \delta_\nu = 0,$$

womit nun alles bewiesen ist.

Bemerkt sei noch, daß die in § 2 nicht gebrauchte Bedingung $a_\varrho + \varkappa_\varrho^{(\nu)} \neq 0$ bei dem zweiten Beweis keinen Mangel der Methode bedeutet, sondern durchaus notwendig ist. Denn in der zu Beginn des § 3 gegebenen Formulierung wäre unser Satz, wie leicht zu sehen, ohne diese Einschränkung nicht mehr richtig. Schon die Differenzengleichungen erster Ordnung lehren dies.

Ende Juli 1908.

Berichtigung.

In meiner Arbeit „Zur Theorie der *Dirichlet*schen Reihen“ (Band 134 dieses Journals) habe ich auf S. 139 oben beiläufig bemerkt, wie eine bei *Riemann*, *Lipschitz*, *Epstein*, *Herglotz* ohne Angabe von Gründen vorgenommene Vertauschung zweier Grenzprozesse begründet werden müßte. Dabei habe ich leider übersehen, worauf mich inzwischen Herr *Landau* aufmerksam machte, daß die genannte Vertauschung sich auch auf einem sehr viel einfacheren Wege rechtfertigen läßt, nämlich mit Hilfe des Satzes über beliebige Vertauschbarkeit der Glieder einer absolut konvergenten Doppelreihe. Da diese Begründung in der Tat recht nahe liegt und keine Schwierigkeiten bietet, so erscheint ihre Unterdrückung allerdings zulässig, sodaß ein Einwand gegen die genannten Autoren daraus nicht erhoben werden kann.

Oskar Perron.

Zur Theorie der Funktion $[x]$.

Von Herrn *E. Busche* in Hamburg.

Die *Eisenstein*sche geometrische Behandlung der Funktion $[x]$, wo x eine reelle Zahl und $[x]$ die durch die Bedingungen

$$x-1<[x]\leqq x$$

bestimmte ganze rationale Zahl bezeichnet, ist sehr geeignet, eine Reihe von Formeln systematisch und vollständig aufzustellen, von denen einige, größtenteils unter der hier aufgehobenen Beschränkung auf teilerfremde Zahlen, schon öfters bewiesen sind. Eine von diesen Formeln ist die bekannte, das quadratische Reziprozitätsgesetz beweisende Gleichung, die *Eisenstein* geometrisch hergeleitet hat*). Eine Erweiterung der *Eisenstein*schen Methode führt zu analogen, bisher nicht betrachteten Formeln, die in einer elementaren Theorie der biquadratischen Reste im Sinne des *Gauß*schen Nachlasses vorkommen.

§ 1.

In der Ebene eines Gitters mit quadratischen Maschen von der Seitenlänge 1 werde ein Rechteck $ABCD$ angenommen, dessen Seiten den Gitterlinien parallel sind und dessen untere linke Ecke A entweder mit einem Gitterpunkt oder mit der Mitte einer horizontalen Quadratseite oder mit dem Mittelpunkt eines Quadrates zusammenfällt. Die horizontale Seite AB und die vertikale Seite AD sollen jede gleich der Hälfte einer ganzen Zahl sein. Das Rechteck werde durch die Diagonale AC in das rechte Dreieck ABC und das linke Dreieck ADC geteilt. Je nach der Lage von

*) Dieses Journal, Bd. 28, S. 246 (1844). Vgl. auch eine Programmabhandlung von *H. Ahlborn*, Hamburg 1881 (Realgymnasium des Johanneums).

A und je nachdem die Seiten Hälften einer geraden oder ungeraden Zahl sind, enthält das Rechteck an seinen Rändern keinen oder bis zu vier halbe Streifen, d. h. solche, die aus einer Reihe von halben Quadraten bestehen. Mit m und n werden ungerade, mit g und h gerade Zahlen > 2 bezeichnet.

Dann sind folgende sieben Fälle zu unterscheiden:

1. A ist ein Gitterpunkt, $AB = \frac{1}{2}g$, $AD = \frac{1}{2}h$: kein halber Streifen.
2. A ist ein Gitterpunkt, $AB = \frac{1}{2}m$, $AD = \frac{1}{2}h$: ein halber Streifen an BC.
3. A ist ein Gitterpunkt, $AB = \frac{1}{2}m$, $AD = \frac{1}{2}n$: zwei halbe Streifen an BC und DC.
4. A ist Mitte einer Quadratseite, $AB = \frac{1}{2}g$, $AD = \frac{1}{2}h$: zwei halbe Streifen an AD und BC.
5. A ist Mitte einer Quadratseite, $AB = \frac{1}{2}m$, $AD = \frac{1}{2}n$: zwei halbe Streifen an AD und DC.
6. A ist Mitte einer Quadratseite, $AB = \frac{1}{2}g$, $AD = \frac{1}{2}n$: drei halbe Streifen an AD, DC, BC.
7. A ist Mitte eines Quadrates, $AB = \frac{1}{2}g$, $AD = \frac{1}{2}h$: vier halbe Streifen an AB, BC, AD, DC.

Die noch übrigen Annahmen liefern nichts Neues mehr.

Nun kann man die Gitterpunkte in dem rechten Dreieck ABC auf doppelte Weise mittels einer Summe von größten ganzen Zahlen abzählen, indem man entweder in A anfangend auf den vertikalen Gitterlinien oder in C beginnend auf den horizontalen Gitterlinien zählt. Dasselbe gilt von dem linken Dreieck ADC, nur zählt man jetzt von A aus auf den horizontalen, von C aus auf den vertikalen Linien. Die Gitterpunkte auf dem Umfang des Rechtecks werden nicht mitgezählt. Eine Summe, die sich auf das rechte Dreieck bezieht, möge mit R, eine solche für das linke Dreieck mit L bezeichnet werden. Der untere Index an diesen Buchstaben gibt den Anfangspunkt der Zählung, der obere die Nummer des gerade betrachteten von den sieben aufgezählten Fällen an. So erhält man die folgenden sieben Abteilungen von je vier Summen:

I.

$$R_A^{(1)} = \sum_{x=1}^{\frac{1}{2}g-1} \left[\frac{xh}{g}\right], \qquad R_C^{(1)} = \sum_{y=1}^{\frac{1}{2}h-1} \left[\frac{yg}{h}\right],$$

$$L_A^{(1)} = \sum_{1}^{\frac{1}{2}h-1} \left[\frac{yg}{h}\right], \qquad L_C^{(1)} = \sum_{1}^{\frac{1}{2}g-1} \left[\frac{xh}{g}\right].$$

II.
$$R_A^{(2)} = \sum_1^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xh}{m}\right], \qquad R_C^{(2)} = \sum_1^{\frac{1}{2}h-1} \left[\frac{ym}{h} + \frac{1}{2}\right],$$
$$L_A^{(2)} = \sum_1^{\frac{1}{2}h-1} \left[\frac{ym}{h}\right], \qquad L_C^{(2)} = \sum_1^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{(2x-1)h}{2m}\right].$$

III.
$$R_A^{(3)} = \sum_1^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xn}{m}\right], \qquad R_C^{(3)} = \sum_1^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{(2y-1)m}{2n} + \frac{1}{2}\right],$$
$$L_A^{(3)} = \sum_1^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{ym}{n}\right], \qquad L_C^{(3)} = \sum_1^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{(2x-1)n}{2m} + \frac{1}{2}\right].$$

IV.
$$R_A^{(4)} = \sum_1^{\frac{1}{2}g} \left[\frac{(2x-1)h}{2g}\right], \qquad R_C^{(4)} = \sum_1^{\frac{1}{2}h-1} \left[\frac{yg}{h} + \frac{1}{2}\right],$$
$$L_A^{(4)} = \sum_1^{\frac{1}{2}h-1} \left[\frac{yg}{h} + \frac{1}{2}\right], \qquad L_C^{(4)} = \sum_1^{\frac{1}{2}g} \left[\frac{(2x-1)h}{2g}\right].$$

V.
$$R_A^{(5)} = \sum_1^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{(2x-1)n}{2m}\right], \qquad R_C^{(5)} = \sum_1^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{(2y-1)m}{2n}\right],$$
$$L_A^{(5)} = \sum_1^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{ym}{n} + \frac{1}{2}\right], \qquad L_C^{(5)} = \sum_1^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{xn}{m} + \frac{1}{2}\right].$$

VI.
$$R_A^{(6)} = \sum_1^{\frac{1}{2}g} \left[\frac{(2x-1)n}{2g}\right], \qquad R_C^{(6)} = \sum_1^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{(2y-1)g}{2n} + \frac{1}{2}\right],$$
$$L_A^{(6)} = \sum_1^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{yg}{n} + \frac{1}{2}\right], \qquad L_C^{(6)} = \sum_1^{\frac{1}{2}g} \left[\frac{(2x-1)n}{2g} + \frac{1}{2}\right].$$

VII.
$$R_A^{(7)} = \sum_1^{\frac{1}{2}g} \left[\frac{(2x-1)h}{2g} + \frac{1}{2}\right], \qquad R_C^{(7)} = \sum_1^{\frac{1}{2}h} \left[\frac{(2y-1)g}{2h} + \frac{1}{2}\right],$$
$$L_A^{(7)} = \sum_1^{\frac{1}{2}h} \left[\frac{(2y-1)g}{2h} + \frac{1}{2}\right], \qquad L_C^{(7)} = \sum_1^{\frac{1}{2}g} \left[\frac{(2x-1)h}{2g} + \frac{1}{2}\right].$$

Aus der Bedeutung dieser Summen ergeben sich unmittelbar die 14 *Gleichungen*

$$R_A^{(i)} = R_C^{(i)} \text{ und } L_A^{(i)} = L_C^{(i)}. \qquad (i = 1, 2, \ldots 7)$$

Um die Beziehung zwischen $R^{(i)}$ und $L^{(i)}$ auf die einfachste Weise anzugeben, empfiehlt es sich, die auf der Diagonale liegenden Gitterpunkte

nur zu einem der Dreiecke, etwa zu dem rechten, zu rechnen. Das ist gleichbedeutend damit, daß in einer Summe L das Zeichen $[\alpha]$ ersetzt wird durch $[\alpha]'$, wo $\alpha-1 \leqq [\alpha]' < \alpha$ ist. Bezeichnet man eine so abgeänderte Summe L durch L', so gilt der Satz:

$R^{(i)} + L^{(i)'}$ ist gleich dem Produkte der bei der i-ten Abteilung auftretenden verschiedenen oberen Summengrenzen, wobei der untere Index beliebig sein kann.

Dabei ist noch zu bemerken, daß wenn die unteren Indices verschieden gewählt werden, also die Summationsbuchstaben und die oberen Grenzen ϱ bei R und L übereinstimmen, die Summe von je zwei entsprechenden Gliedern der beiden Summen konstant ist und zwar gleich der anderen oberen Grenze σ. Als entsprechend gelten zwei Glieder, deren x oder y sich zu $\varrho+1$ ergänzen.

Aus jeder der 28 Summen kann man eine andere dadurch ableiten, daß man einen neuen Summationsbuchstaben z einführt, indem man x oder y durch $\varrho+1-z$ ersetzt, wenn ϱ die obere Grenze der Summe ist.

§ 2.

Die soeben angegebenen Beziehungen zwischen Summen von größten Ganzen lassen sich sehr leicht verallgemeinern, da man die Lage des Punktes A und die Seitenlängen des Rechtecks beliebig abändern kann und auch die Punkte A und C durch eine von jeder Gitterlinie nur einmal geschnittene krumme Linie verbinden darf, ohne die Beziehungen zwischen den R und L zu ändern.

Ist z. B. β ein echter positiver Bruch und läßt man A mit einem Punkte auf einer vertikalen Gitterlinie zusammenfallen, der um die Strecke β über einem Gitterpunkt liegt, setzt man ferner $AB = a+\alpha$, wo a eine ganze positive Zahl, α ein positiver echter Bruch ist, und macht $BC=1$, so hat man jetzt als $R_A = R_C$, weil R_C nur aus einem Gliede besteht, die Gleichung

$$\sum_1^a \left[\frac{x}{a+\alpha}+\beta\right] = [(a+\alpha)\beta+1-\alpha],$$

die für $\alpha=1$ in eine von *Hermite* gefundene, von *Stern* zweimal bewiesene

Formel übergeht*). Statt $\beta < 1$ kann man offenbar nachträglich leicht einen beliebigen positiven Wert von β einführen, wie er bei den genannten Autoren angenommen wird.

Auch auf mehr als zwei Dimensionen kann man diese Betrachtungen ausdehnen. So findet man z. B. als räumliches Analogon einer Gleichung $R_A = R_C$ die Formel

$$\sum_{x=1}^{a-1} \left[\frac{bx}{a}\right] \cdot \left[\frac{cx}{a}\right] = \sum_{y=1}^{b-1} \sum_{z=1}^{c-1} \text{Min}\left(\left[\frac{ay}{b}\right], \left[\frac{az}{c}\right]\right),$$

wo a, b, c beliebige positive ganze Zahlen sind und Min (μ, ν) die kleinste der Zahlen μ und ν bezeichnet. Den Formeln dieser Art entsprechen elementare Beziehungen zwischen bestimmten Integralen, z. B. die folgende einfachste derartige Gleichung:

$$\int_0^1 x^2\, dx = \int_0^1 \int_0^1 \text{Min}\,(y, z)\, dy\, dz.$$

Es hat jedoch kein großes Interesse, die *Eisenstein*sche Methode zur Aufsuchung solcher Beziehungen zwischen Summen von größten Ganzen zu benutzen, da in dieser Hinsicht die *Dirichlet*sche Transformationsformel und eine von mir angegebene identische Gleichung, die diese Formel als besonderen Fall enthält**), zu viel allgemeineren Resultaten führt. Dagegen ermöglicht es die geometrische Methode, auf besonders einfache Weise jede Summe des § 1 für sich zu berechnen oder wenigstens ihren Rest (mod 2) zu ermitteln, wobei allerdings zum Teil auch nicht geometrische Betrachtungen notwendig sind.

§ 3.

1. Bei den Abteilungen I, IV, VII mit zwei geraden Zahlen findet man den Wert einer Summe unmittelbar aus der Tatsache, daß die Summen R und L einander gleich sind, während $R + L'$ bekannt ist. Da bei I auf

*) *Hermite*, Acta mathematica, T. V. p. 315 (1884), *Stern*, Acta mathematica, T. VIII. p. 93 (1886) und dieses Journal, Bd. 102, S. 11 (1888).

**) *Dirichlet*s Werke, Bd. II. S. 101 oder *Hacks*, Acta mathematica, T. X. S. 1 (1887), *Busche*, Mitteilungen der math. Gesellschaft in Hamburg, Bd. IV, Heft 2, S. 63 (1902).

der Diagonale, abgesehen von den Endpunkten $\frac{1}{2}\delta - 1$ Gitterpunkte liegen, wo δ hier und weiterhin den größten gemeinsamen Teiler der beiden vorkommenden Zahlen bedeutet, so ist

$$(1.) \qquad \sum_{1}^{\frac{1}{2}g-1}\left[\frac{hx}{g}\right] = \sum_{1}^{\frac{1}{2}h-1}\left[\frac{gy}{h}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}g-1\right)\left(\frac{1}{2}h-1\right)+\frac{1}{4}(\delta-2).$$

Denn zu der Hälfte aller Gitterpunkte in $ABCD$ muß man noch die Hälfte der auf der Diagonale liegenden hinzufügen, um $R_A^{(1)}$ zu finden. Setzt man $g=2a$, $h=2b$, $\frac{1}{2}\delta=(a,b)=q$, wo nun a und b beliebige positive ganze Zahlen >1 sind, deren größter gemeinsamer Teiler q ist, so erhält man die bekannte Formel

$$\sum_{1}^{b-1}\left[\frac{ax}{b}\right] = \frac{1}{2}(a-1)(b-1)+\frac{q-1}{2},$$

die von *Stern* auf anderem Wege abgeleitet ist*).

Bei IV liegen, wie man aus $R_A^{(4)}$ sofort erkennt, auf der Diagonale nur dann Gitterpunkte, und zwar $\frac{1}{2}\delta$, wenn h eine höhere Potenz von 2 enthält als g, oder wenn $\frac{h}{\delta}\equiv 0 \pmod 2$ ist. Daher ist

$$(2.) \qquad \sum_{1}^{\frac{1}{2}g}\left[\frac{(2x-1)h}{2g}\right] = \sum_{1}^{\frac{1}{2}h-1}\left[\frac{gy}{h}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}g\left(\frac{1}{2}h-1\right)+\frac{\delta}{4}\cdot\frac{1+(-1)^{\frac{h}{\delta}}}{2},$$

Ebenso erhält man aus VII

$$(3.) \qquad \sum_{1}^{\frac{1}{2}g}\left[\frac{(2x-1)h}{2g}+\frac{1}{2}\right] = \sum_{1}^{\frac{1}{2}h}\left[\frac{(2y-1)g}{2h}+\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{8}gh+\frac{\delta}{4}\cdot\frac{1-(-1)^{\frac{gh}{\delta^2}}}{2}.$$

Jetzt liegen nämlich auf der Diagonale $\frac{1}{2}\delta$ Gitterpunkte dann und nur dann, wenn g und h dieselbe Potenz von 2 als Faktor haben, d. h. wenn $\frac{g\cdot h}{\delta^2}\equiv 1 \pmod 2$ ist. Die letzten beiden Formeln kann man durch Einführung von $2a$ und $2b$ statt g und h wieder vereinfachen.

2. Um die Quadrupel II und III zu behandeln, ist folgendes vorauszuschicken. Setzt man für zwei *teilerfremde* positive ganze Zahlen $a>1$ und $b>1$ unter Abänderung einer *Gauß*schen Bezeichnung

$$\sum_{1}^{\left[\frac{b}{2}\right]}\left[\frac{ax}{b}\right] = (a|b) \text{ und } (a|1) = (1|b) = (1|1) = 0,$$

*) *Stern*, dieses Journal, Bd. 102, S. 12.

so bestehen bekanntlich zwischen dieser Funktion und dem *Jacobi*schen Zeichen die Gleichungen

$$\left(\frac{\frac{1}{2}h'}{m'}\right)=(-1)^{(h'\,|\,m')} \quad \text{und} \quad \left(\frac{n'}{m'}\right)=(-1)^{(n'\,|\,m')},$$

wo die Striche andeuten sollen, daß je zwei in demselben Zeichen vorkommende Zahlen relativ prim sind. Setzt man dann $m=\delta m'$, $h=\delta h'$, so ist

$$(4.)\qquad \sum_{1}^{\frac{m-1}{2}}\left[\frac{hx}{m}\right]=\sum_{1}^{\frac{1}{2}h-1}\left[\frac{my}{h}+\frac{1}{2}\right]=(h'|m')+h'm'\cdot\frac{\delta^2-1}{8}-\frac{m'-1}{2}\cdot\frac{\delta-1}{2}.$$

Diese Gleichung erhält man, indem man das Dreieck ABC bei A anfangend in ein Dreieck mit den Katheten $\frac{1}{2}m'$ und $\frac{1}{2}h'$ und in $\delta-1$ Trapeze von der Breite $\frac{1}{2}m'$ zerlegt und die letzteren abwechselnd als Differenz und als Summe aus einem Rechteck und einem Dreieck betrachtet, dessen Hypotenuse auf AC liegt und dessen Gitterpunkte denen des ersten Dreiecks Punkt für Punkt entsprechen. Auf jeder horizontalen Gitterlinie eines Rechtecks liegen im ersten Falle $\frac{m'-1}{2}$, im letzteren $\frac{m'+1}{2}$ Gitterpunkte.

Genau ebenso ergibt sich

$$(5.)\qquad \sum_{1}^{\frac{m-1}{2}}\left[\frac{nx}{m}\right]=\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{(2y-1)m}{2n}+\frac{1}{2}\right]=(n'|m')+m'n'\cdot\frac{\delta^2-1}{8}-\frac{m'-1}{2}\frac{\delta-1}{2}.$$

Um noch die Funktionen $(h'|m')$ und $(n'|m')$, die sich nicht rational durch ihre Argumente ausdrücken lassen*), zu beseitigen, kann man statt (4.) und (5.) die folgenden Kongruenzen schreiben:

$$\sum_{1}^{\frac{m-1}{2}}\left[\frac{hx}{m}\right]\equiv\frac{1-\left(\frac{\frac{1}{2}h'}{m'}\right)}{2}+\frac{m'-1}{2}\cdot\frac{\delta-1}{2} \pmod 2,$$

$$\sum_{1}^{\frac{m-1}{2}}\left[\frac{nx}{m}\right]\equiv\frac{1-\left(\frac{n'}{m'}\right)}{2}+\frac{\delta^2-1}{8}+\frac{m'-1}{2}\cdot\frac{\delta-1}{2} \pmod 2.$$

Die Summen $L^{(2)}$ und $L^{(3)}$ werden berechnet, indem man bedenkt, daß sie von den entsprechenden Größen L', die mit den R in der Beziehung $R+L'=(\frac{1}{2}h-1)\frac{m-1}{2}$, bzw. $=\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}$ stehen, sich nur dadurch unterscheiden, daß bei L die auf der Diagonale außer A noch liegenden

*) Vgl. *Busche*, dieses Journal, Bd. 106, S. 80 (1890).

Gitterpunkte, deren Anzahl beidemal $\frac{\delta-1}{2}$ beträgt, mitzuzählen sind, bei L' nicht. Wegen der Symmetrie der dritten Abteilung in bezug auf m und n kann man aber $L^{(3)}$ auch direkt ebenso berechnen wie $R^{(3)}$ und erhält dann für $\delta = 1$ das Reziprozitätsgesetz zwischen den Zeichen $(m'|n')$ und $(n'|m')$, den Ausgangspunkt aller dieser Untersuchungen.

3. Die Abteilungen V und VI gehören wieder zusammen. Der Ausdruck $L_A^{(5)}$ ist in anderer Schreibweise und für $\delta = 1$ zuerst von *E. Schering* betrachtet worden.*) Er hat den Satz ausgesprochen, daß diese Summe $\equiv 0 \pmod 2$ ist. Das habe ich in meiner Dissertation bewiesen; einen anderen Beweis hat *Kronecker* gegeben. *Hacks* und *Stern* haben den Zusammenhang zwischen $L^{(5)}$ und $R^{(5)}$ erkannt und *Stern* hat dadurch für $\delta = 1$ den Rest (mod 2) von $R_A^{(5)}$ bestimmt, den *Kronecker* schon früher gefunden hatte**).

Ich folge hier dem Beweise von *Kronecker*, indem ich ihn auf teilerverwandte m und n verallgemeinere. Der Beweis beruht auf der Bemerkung, daß $[\alpha+\frac{1}{2}]$ die nächste an α liegende ganze Zahl ist; eine Zweideutigkeit kann dabei für die hier zu benutzenden α nicht eintreten, weil diese Zahl niemals gleich einer ganzen Zahl vermehrt um $\frac{1}{2}$ wird. Es ist also

$$\frac{my}{n} - \left[\frac{my}{n} + \frac{1}{2}\right]$$

immer absolut genommen $< \frac{1}{2}$ und daher

$$my - n\left[\frac{my}{n} + \frac{1}{2}\right] = z \cdot \delta,$$

wo der absolute Betrag von z eine der Zahlen $0, 1, 2, \cdots \frac{n'-1}{2}$ ist. Man überzeugt sich leicht davon, daß für $y = 1, 2, \cdots \frac{n-1}{2}$ diejenigen $\frac{\delta-1}{2}$ Zahlen z, die zu $y = n', 2n', \cdots \frac{\delta-1}{2} n'$ gehören, gleich Null sind, während die übrigen δ-mal, abgesehen vom Vorzeichen, die Werte $1, 2 \cdots \frac{n'-1}{2}$ durchlaufen. Daraus folgt wegen $m \equiv n \equiv 1 \pmod 2$

---

*) *E. Schering*, Abh. der Göttinger Gesellschaft der Wiss. Bd. XXIV. S. 45 (1879).

**) *Busche:* Über eine Beweismethode in der Zahlentheorie (Diss. Göttingen 1883), S. 34. *Kronecker*, dieses Journal, Bd. 106, S. 347 (1890); *Hacks*, Acta mathematica, Bd. 12, S. 110 (1889), *Stern,* dieses Journal, Bd. 106, S. 342; *Kronecker*, Monatsberichte der Berliner Akademie (1884) oder Werke, Bd. 2, S. 506.

$$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{my}{n}+\frac{1}{2}\right]\equiv 1+2+\cdots+\frac{\delta n'-1}{2}+\delta^2\left(1+2+\cdots+\frac{n'-1}{2}\right)$$

$$\equiv\frac{\delta^2\cdot n'^2-1}{8}+\frac{n'^2-1}{8}\equiv\frac{\delta^2-1}{8}\pmod 2.$$

Es ist also

$$(6.)\qquad \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{my}{n}+\frac{1}{2}\right]=\sum_{1}^{\frac{m-1}{2}}\left[\frac{nx}{m}+\frac{1}{2}\right]\equiv\frac{\delta^2-1}{8}\pmod 2.$$

Für $\delta=1$ erhält man den Satz von *Schering*.

Ganz analog folgt aus dem Gleichungssystem

$$gy-n\left[\frac{gy}{n}+\frac{1}{2}\right]=z\cdot\delta \qquad \left(y=1,2,\cdots\frac{n-1}{2}\right)$$

$$(7).\qquad \sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{gy}{n}+\frac{1}{2}\right]=\sum_{1}^{\frac{1}{2}g}\left[\frac{(2x-1)n}{2g}+\frac{1}{2}\right]\equiv\frac{n'^2-1}{8}\pmod 2,\ \text{wo } n'=\frac{n}{\delta}\text{ ist.}$$

Bei den Quadrupeln V und VI liegen auf der Diagonale niemals Gitterpunkte*). Daher sind mit den Resten von $L^{(5)}$ und $L^{(6)}$ auch die von $R^{(5)}$ und $R^{(6)}$ unmittelbar gefunden. Es ist

$$(8.)\qquad \sum_{1}^{\frac{m-1}{2}}\left[\frac{(2x-1)n}{2m}\right]=\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{(2y-1)m}{2n}\right]\equiv\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}+\frac{\delta^2-1}{8}\pmod 2,$$

$$(9.)\qquad \sum_{1}^{\frac{1}{2}g}\left[\frac{2x-1)n}{2g}\right]=\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{(2y-1)g}{2n}+\frac{1}{2}\right]\equiv\frac{1}{2}g\cdot\frac{n-1}{2}+\frac{n'^2-1}{8}\pmod 2.$$

§ 4.

Wenn man die *Gauß*sche Bestimmung des biquadratischen Rest-

*) Wahrscheinlich ist der Umstand, daß bei $L_A^{(5)}$ die eingeklammerte Zahl auch dann, wenn $\delta>1$ ist, niemals ganzzahlig wird, der Grund dafür, daß *Kronecker* (d. Journ. Bd. 106) die Zahlen m und n nicht ausdrücklich als relativ prim voraussetzt, obgleich der von ihm bewiesene Satz für $\delta>1$ unrichtig werden kann. Meistens macht sich ja ein $\delta>1$ durch Ganzzahligwerden des Arguments von $[\alpha]$ bemerkbar. In der Abhandlung in den Berl. Ber. ist es zweifelhaft, ob an der betreffenden Stelle m und n Primzahlen oder beliebige ungerade Zahlen sein sollen, da kurz vorher von *Legendre*schen Zeichen die Rede ist. Der dort betrachtete Ausdruck geht durch eine Substitution in $R_A^{(5)}$ über.

charakters für zwei ungerade Zahlen des Körpers $K(i)$*) weiter verfolgt, so wird man zu Ausdrücken von der Form

$$\Sigma(-1)^x[f(x)]^2$$

geführt, deren Rest (mod 4) in Betracht zu ziehen ist. Dabei ist $f(x)$ wieder eine reelle ganze lineare Funktion des reellen Argumentes x. Auch diese Summen lassen sich mittels der geometrischen Methode behandeln, wenn man sie in der folgenden Weise abändert.

Den Gitterpunkten des Rechtecks $ABCD$, dessen Diagonale die Gleichung $y=f(x)$ hat, werden schachbrettartig abwechselnd die Vorzeichen -1 und $+1$ zugeordnet, so daß der A zunächst, aber nicht auf dem Rande liegende Gitterpunkt das Zeichen -1 bekommt. Dann hat die Zahl $(-1)^x[f(x)]^2$ inbezug auf den Modul 4 den Rest 0 oder $(-1)^x$, je nachdem $[f(x)]$ gerade oder ungerade ist, und $\Sigma(-1)^x[f(x)]^2$ hat denselben Rest (mod 4) wie die Summe aller Vorzeichen der Gitterpunkte innerhalb des Dreiecks ABC, wobei die auf AC liegenden Gitterpunkte mitgerechnet werden, aber nicht die auf AB befindlichen.

Ist $x=F(y)$ die inverse Funktion von $y=f(x)$, so folgt hieraus, falls A der Anfangspunkt des Koordinatensystems ist, sofort die Kongruenz

$$(1.)\quad \sum_1^{[\nu]}(-1)^x[f(x)]^2+\sum_1^{[f(\nu)]}(-1)^y[F(y)]'^2\equiv-[\nu]^2\cdot[f(\nu)]^2 \pmod 4,$$

wenn ν die Länge von AB, also $f(\nu)$ die von BC ist. Denn die Summe aller Vorzeichen der Gitterpunkte in dem Rechteck ist $\equiv 0$ (mod 4), wenn mindestens eine Seite eine gerade Zahl von Gitterpunkten enthält, sonst $\equiv -1$, da der erste Gitterpunkt unten links das Zeichen -1 hat. Diese Kongruenz läßt sich auch ohne diese geometrische Betrachtung aus der identischen Gleichung ableiten, die ich in § 2 zitiert habe**).

Setzt man, wenn a und b beliebige positive *teilerfremde* Zahlen >1 sind,

$$\sum_1^{[\frac{b}{2}]}(-1)^x\left[\frac{ax}{b}\right]^2=((a|b)) \text{ und } ((a|1))=((1|b))=((1|1))=0,$$

---

*) *Gauß*, Werke, Bd. II, S. 335 und 374.

**) Vgl. auch dieses Journal, Bd. 103, S. 182, wo ich eine etwas allgemeinere Formel aus einer weniger allgemeinen Transformationsformel abgeleitet habe.

so ist nach (1.)

$$(2.) \qquad ((a|b)) + ((b|a)) \equiv -\left[\frac{a}{2}\right]^2 \cdot \left[\frac{b}{2}\right]^2 \pmod 4.$$

Von jetzt an möge der Modul 4 bei einer Kongruenz weggelassen werden.

Um das Reziprozitätsgesetz (2.) für die Berechnung von $((a|b))$ nutzbar zu machen, ist eine Beziehung zwischen $((a+\lambda b|b))$ und $((a|b))$ aufzusuchen. Es ist

$$(3.) \quad \sum_1^{[\frac{b}{2}]} (-1)^x \cdot \left[\frac{(a+\lambda b)x}{b}\right]^2 = \sum_1^{[\frac{b}{2}]} (-1)^x \cdot \left(\left[\frac{ax}{b}\right]^2 + 2\lambda x \left[\frac{ax}{b}\right] + \lambda^2 x^2\right).$$

Wegen des zweiten Gliedes rechts liefert diese Gleichung nur dann ein brauchbares Resultat, wenn λ gerade ist*). Für $\lambda = 2\mu$ ist

$$(4.) \qquad ((a+2\mu b|b)) \equiv ((a|b)).$$

Da ferner für $2\mu b > a$

$$((-a+2\mu b|b)) \equiv \sum_1^{[\frac{b}{2}]} (-1)^x \cdot \left(-\left[\frac{ax}{b}\right]-1\right)^2$$

und

$$2\left[\frac{ax}{b}\right] \equiv 2\left[\frac{ax}{b}\right]^2, \qquad \sum_1^{[\frac{b}{2}]} (-1)^x \equiv -\left[\frac{b}{2}\right]^2$$

---

*) Es möge jedoch bemerkt werden, daß man die Gleichung (3.) benutzen kann, um den Rest der Summe $\sum_1^{[\frac{b}{2}]} \left[\frac{ax}{b}\right]^2$ auf $((a+b|b))$ zurückzuführen. Für $\lambda = 1$ erhält man nämlich, indem man bedenkt, daß

$$\left[\frac{ax}{b}\right]^2 + 2x\left[\frac{ax}{b}\right] \equiv (2x+1)\left[\frac{ax}{b}\right]^2 \equiv (-1)^x \left[\frac{ax}{b}\right]^2 \text{ und } \sum_1^{[\frac{b}{2}]} (-1)^x \cdot x^2 \equiv -\left[\frac{b+2}{4}\right]$$

ist,

$$\sum_1^{[\frac{b}{2}]} \left[\frac{ax}{b}\right]^2 \equiv ((a+b\,|\,b)) + \left[\frac{b+2}{4}\right].$$

Für $\sum_1^{[\frac{b}{2}]} \left[\frac{ax}{b}\right]^2$ gibt es höchstwahrscheinlich kein Reziprozitätsgesetz, denn aus dem mehrfach erwähnten allgemeinen Satz (Hamb. Mitt. 1902) erhält man

$$\sum_1^{[\frac{b}{2}]} \left[\frac{ax}{b}\right]^2 + \sum_1^{[\frac{a}{2}]} \left[\frac{by}{a}\right](2y-1) = \left[\frac{a}{2}\right]^2 \cdot \left[\frac{b}{2}\right],$$

eine Gleichung, die auch (mod 4) keine reziproke Beziehung liefert.

ist, so ist

$$(5.) \qquad ((-a+2\mu b\,|\,b)) \equiv -((a\,|\,b))-\left[\frac{b}{2}\right]^2.$$

Stellt man also für a und b einen *Euklid*ischen Algorithmus mit lauter geraden Quotienten auf, so ermöglichen die Formeln (2.), (4.), (5.) die Berechnung des Zeichens $((a\,|\,b))$. Für $a=100$, $b=23$ erhält man z. B. aus dem folgenden links stehenden Gleichungssystem das rechts stehende System von Kongruenzen:

$$\begin{aligned}
100 &= 4\cdot 23+8, & ((100|23)) &\equiv ((8|23)) &&\equiv -((23|8)),\\
23 &= 2\cdot 8\ +7, & ((\ 23|8\ )) &\equiv ((7|8\ )) &&\equiv -((\ 8|7)),\\
8 &= 2\cdot 7\ -6, & ((\ 8|7\ )) &\equiv -((6|7\ ))-1 &&\equiv ((\ 7|6))-2,\\
7 &= 2\cdot 6\ -5, & ((\ 7|6\ )) &\equiv -((5|6\ ))-1 &&\equiv ((\ 6|5))-1,\\
6 &= 2\cdot 5\ -4, & ((\ 6|5\ )) &\equiv -((4|5\ )) &&\equiv ((\ 5|4)),\\
5 &= 2\cdot 4\ -3, & ((\ 5|4\ )) &\equiv -((3|4\ )) &&\equiv ((\ 4|3)),\\
4 &= 2\cdot 3\ -2, & ((\ 4|3\ )) &\equiv -((2|3\ ))-1 &&\equiv ((\ 3|2))-2,\\
3 &= 2\cdot 2\ -1, & ((\ 3|2\ )) &\equiv -((1|2\ ))-1 &&\equiv -1,
\end{aligned}$$

und daraus folgt $((100|23))\equiv 2$. Wenn, wie es hier der Fall ist, zuletzt alle Zahlen der Reihe nach in dem Algorithmus vorkommen, so kann man die Rechnung natürlich durch eine besondere Vorschrift leicht abkürzen.

Trotz der Analogie zwischen $((a|b))$ und $(a|b)$ ist doch zwischen diesen Symbolen deshalb ein großer Unterschied, weil für $(a|b)$, wenn b ungerade ist, die Beziehung zu dem *Jacobi*schen Zeichen besteht, während ein dem *Jacobi*schen Zeichen analoges Symbol *mit Multiplikationstheoremen*, das man $((a|b))$ zuordnen könnte, anscheinend nicht vorhanden ist. Aus diesem Grunde hauptsächlich reicht auch das Reziprozitätsgesetz für $((a|b))$ durchaus nicht hin, um daraus einen Beweis des biquadratischen Reziprozitätsgesetzes abzuleiten. Es scheint vielmehr zu diesem Zweck unerläßlich zu sein, noch andere Theoreme heranzuziehen, von denen ich jetzt einige herleiten werde, die auch an und für sich von Interesse sind.

§ 5.

1. Zuerst möge der Rest der Summe

$$S=\sum_1^m (-1)^x\left[\frac{(2x-1)n}{2m}\right]^2$$

berechnet werden. In dem Rechteck $ABCD$, wo A in der Mitte einer horizontalen Quadratseite des Gitters liegt, sind auf jeder Vertikalreihe $n-1$, auf jeder Horizontalreihe m Gitterpunkte; die Diagonale ist frei von solchen Punkten. Man teile das Dreieck ABC durch die mittlere Vertikalreihe EF in das Dreieck AEF und das Trapez $EBCF$. Die Linie EF gehöre keiner der beiden Figuren an. Dann lasse man der ϱ-ten Vertikalreihe im Dreieck die $(m-\varrho+1)$-te Vertikalreihe entsprechen, die in dem Trapez liegt. Weil m ungerade ist, fangen zwei entsprechende Vertikalreihen mit einem Gitterpunkt desselben Vorzeichens an. Zwei entsprechende Vertikalreihen liefern nun denselben Beitrag zu dem Rest von S. Denn das Stück einer ganzen Vertikalreihe des Rechtecks, das die Verlängerung einer Trapezreihe ist, stimmt mit der entsprechenden Dreiecksreihe in der Verteilung der darauf liegenden Gitterpunkte überein, wenn man beide Strecken vom Rande des Rechtecks nach der Diagonale hin durchläuft. Aber homologe Gitterpunkte auf beiden Strecken haben entgegengesetzte Vorzeichen, weil n ungerade ist. Deshalb hat der letzte Gitterpunkt der Trapezreihe dasselbe Vorzeichen wie der letzte Gitterpunkt der entsprechenden Dreiecksreihe, und daraus folgt, weil ja auch die Anfangspunkte übereinstimmen, die Behauptung über den Beitrag der beiden Reihen zu dem Rest von S. Auf der mittleren Vertikalreihe EF liegen $\frac{n-1}{2}$ Gitterpunkte, und der erste von ihnen ist mit $-(-1)^{\frac{m-1}{2}}$ bezeichnet. Es ist also

$$S \equiv 2 \sum_{1}^{\frac{m-1}{2}} (-1)^x \left[\frac{(2x-1)n}{2m}\right]^2 - (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)^2$$

oder nach (8.) von § 3

$$S \equiv \frac{(m-1)(n-1)}{2} + \frac{\delta^2-1}{4} - (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)^2.$$

Die rechte Seite kann noch vereinfacht werden; es ergibt sich dann

$$(1.) \qquad \sum_{1}^{m} (-1)^x \left[\frac{(2x-1)n}{2m}\right]^2 \equiv -\left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \frac{\delta^2-1}{4}.$$

2. Sehr leicht läßt sich der Rest von

$$S' = \sum_{1}^{g} (-1)^x \left[\frac{(2x-1)n}{2g}\right]^2$$

finden. Denn wenn man ebenso verfährt wie vorher, so sieht man, daß

wegen der geraden Zahl von Gitterpunkten in einer Horizontalreihe des Rechtecks jetzt zwei entsprechende Vertikalreihen des Dreiecks und des Trapezes zusammen den Beitrag Null zu dem Rest von S' liefern. Da EF jetzt keine Gitterlinie ist, so ist demnach

$$(2.) \qquad \sum_1^g (-1)^x \left[\frac{(2x-1)n}{2g}\right]^2 \equiv 0.$$

3. Bei der Berechnung des Restes von

$$S'' \doteq \Sigma(-1)^x \left[\frac{(2x-1)h}{2m}\right]^2$$

ist zu beachten, daß auf der Diagonale immer δ Gitterpunkte liegen. Die mittlere Vertikalreihe EF, die jetzt wieder Gitterlinie ist, hat nämlich den Gitterpunkt F auf der Diagonale, und auf beiden Hälften der Diagonale liegen jetzt noch je $\frac{\delta-1}{2}$ Gitterpunkte. Rechnet man nun zunächst diese $\frac{\delta-1}{2}$ Gitterpunkte auf der zweiten Hälfte FC der Diagonale nicht mit und nennt die so abgeänderte Summe S'', so geben je zwei entsprechende Vertikalreihen des Dreiecks und des Trapezes zusammen abwechselnd den Beitrag -1 und $+1$ zu dem Rest von S_1'', alle zusammen also den Beitrag $-\left(\frac{m-1}{2}\right)^2$, EF liefert $-(-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2$. Da ferner, weil man von einem Gitterpunkt auf der Diagonale zu dem nächsten auf der Diagonale liegenden Gitterpunkt um eine ungerade Zahl von Einheiten nach rechts, um eine gerade Zahl nach oben gehen muß, diese Gitterpunkte abwechselnde Vorzeichen haben und der mittlere F das Zeichen $(-1)^{\frac{m+h-1}{2}}$ hat, so hat der erste von den bisher nicht mitgerechneten Gitterpunkten das Zeichen $-(-1)^{\frac{m+h-1}{2}}$, und diese geben also zusammen den Beitrag

$$-(-1)^{\frac{m+h-1}{2}} \cdot \left(\frac{\delta-1}{2}\right)^2.$$

Daher ist

$$S'' \equiv -\left(\frac{m-1}{2}\right)^2 - (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 - (-1)^{\frac{m+h-1}{2}} \cdot \left(\frac{\delta-1}{2}\right)^2.$$

Vereinfacht man die rechte Seite wieder, so erhält man

$$(3.) \qquad \sum_1^m (-1)^x \cdot \left[\frac{(2x-1)h}{2m}\right]^2 \equiv -\left(\frac{m\delta-1}{2} + \frac{h}{2}\right)^2.$$

4. Um den Rest von

$$S''' = \sum_{1}^{g} (-1)^x \left[\frac{(2x-1)h}{2g}\right]^2$$

zu berechnen, betrachte man zuerst den Fall, wo $g = 2^\alpha \cdot m$, $h = 2^\beta \cdot n$ und $\alpha \neq$ ist. Bezeichnet man dann mit $\gamma \overline{\overline{>}} 1$ die kleinere der Zahlen α und β, so zerlege man das Dreieck ABC in ein Dreieck und $2^\gamma - 1$ Trapeze von der Breite $\frac{g}{2^\gamma}$ und jedes Trapez in ein Rechteck, dessen Höhe ein Vielfaches von $\frac{h}{2^\gamma}$ ist und ein dem ersten kongruentes Dreieck, dessen Hypotenuse ein Stück von AC ist. Die Gitterpunktzahl in jedem Rechteck ist, da mindestens eine der beiden Seiten gerade ist, eine gerade Zahl, die Summe ihrer Vorzeichen also $\equiv 0$. Von irgend einem Gitterpunkt eines Dreiecks gelangt man zu dem homologen des nächstfolgenden Dreiecks, indem man um $\frac{g}{2^\gamma}$ Einheiten nach rechts und um $\frac{h}{2^\gamma}$ Einheiten nach oben geht. Weil eine und nur eine dieser beiden Zahlen ungerade ist, so haben homologe Gitterpunkte in benachbarten Dreiecken entgegengesetzte Vorzeichen, und alle Dreiecke liefern also, da ihre Anzahl 2^γ gerade ist, den Beitrag Null zu dem gesuchten Rest. In diesem Falle ist also $S''' \equiv 0$.

Ist dagegen $\alpha = \beta = \gamma$, so haben, weil $\frac{g}{2^\gamma}$ und $\frac{h}{2^\gamma}$ jetzt beide ungerade sind, homologe Gitterpunkte in allen Dreiecken dasselbe Vorzeichen, alle Dreiecke liefern denselben Beitrag zu dem Rest von S''', der also $\equiv 0$ ist, wenn $\gamma \overline{\overline{>}} 2$ ist. Von den Rechtecken geben jetzt das 1., 3., 5. ... den Beitrag $+1$, da diese Rechtecke zwei ungerade Seiten haben und jedesmal der erste Gitterpunkt unten links positiv ist, die übrigen Rechtecke mit je einer geraden Seite liefern den Beitrag Null. Da die Anzahl der ersten Rechtecke gleich $2^{\gamma-1}$ ist, so geben sie zusammen den Beitrag $2^{\gamma-1} \equiv \frac{h}{2}$, wenn $\gamma \overline{\overline{>}} 2$ ist. Das ist also auch der Rest von S''' für $\gamma \overline{\overline{>}} 2$. Ist $\gamma = 1$, so sind zwei Dreiecke vorhanden, die denselben Beitrag geben, und ein Rechteck mit der Gitterpunktsumme $+1$. Da die Dreiecke ungerade Katheten haben, nämlich $\frac{g}{2}$ und $\frac{h}{2}$, so kann die Formel (1.) angewendet werden. Beide Dreiecke liefern danach zusammen den Beitrag

$-2\left(\frac{\frac{h}{2}-1}{2}\right)^2+\frac{\delta_1^2-1}{2}\equiv\frac{h}{2}-1$, wo $\delta_1=\left(\frac{g}{2},\frac{h}{2}\right)$ ist. Fügt man den Beitrag $+1$ des Rechtecks hinzu, so ist auch jetzt $S'''\equiv\frac{h}{2}$.

Die Fälle $\alpha\neq\beta$ und $\alpha=\beta$ können in folgende Formel zusammengefaßt werden:

$$(4.)\qquad \sum_1^g(-1)^x\left[\frac{(2x-1)h}{2g}\right]^2\equiv\frac{1-(-1)^{\frac{gh}{\delta^2}}}{2}\cdot\frac{h}{2}.$$

Den jetzt behandelten Summen entsprechen gewisse Summen R_A des § 1. Natürlich sind mit ihnen auch die den R_C entsprechenden Summen gefunden. Die den Summen L analogen Summen sind von den mit den R analogen nicht verschieden.

§ 6.

Es soll jetzt eine Beziehung zwischen $((g|m))$ und $((h|n))$ unter der Voraussetzung

$$gn-hm=2\varepsilon,$$

wo $\varepsilon=\pm1$ ist, aufgesucht werden. Wie es die Definition dieser Symbole verlangt, sind g und m, sowie h und n teilerfremd, und es kann $g>h$ und deshalb auch $m>n$ vorausgesetzt werden.

Die Funktion $((g|m))$ ist kongruent der Summe der Vorzeichen der Gitterpunkte in einem rechtwinkligen Dreieck ABC, wo A ein Gitterpunkt, $AB=\frac{1}{2}m$, $BC=\frac{1}{2}g$ ist. Ebenso ist $((h\,|\,n))$ kongruent der entsprechenden Summe für das rechtwinklige Dreieck AEF, wo E auf AB, F in der Nähe von AC innerhalb oder außerhalb des Dreiecks ABC liegt, je nachdem $\varepsilon=+1$ oder $=-1$, und $AE=\frac{1}{2}n$, $EF=\frac{1}{2}h$ ist. Verbindet man F mit C, so liegt in dem Dreieck AFC kein Gitterpunkt, weder auf dem Rande (abgesehen von A), noch im Innern. Denn erst in dem Parallelogramm, dessen Seiten doppelt so lang wie AF und AC sind, liegt, weil sein Flächeninhalt $=\pm2$ ist, im Innern genau ein Gitterpunkt und zwar im Mittelpunkt, der sich außerhalb des Dreiecks AFC befindet. Bezeichnet man also noch mit G den Schnittpunkt der durch F gehenden horizontalen Gitterlinie mit der vertikalen Linie BC, so ist $((g|m))-((h|n))$ kongruent der Summe der Gitterpunktvorzeichen in dem Rechteck $EBGF$

und in dem Dreieck FGC. Das Rechteck, zu dem FG gerechnet wird, hat seine Eckpunkte auf der Mitte je einer Gitterquadratseite; es hat die Seiten $\frac{m-n}{2}$ und $\frac{h}{2}$. Das Dreieck FGC ist, weil sein Eckpunkt F auf der Mitte einer Quadratseite liegt, ein solches Dreieck wie das im vorigen Paragraphen betrachtete Dreieck ABC, so daß die dort angegebenen Formeln hier benutzt werden können. Die Kathete $GC = \frac{g-h}{2}$ ist wegen $gn-hm = 2\varepsilon$ ungerade, und wegen $(g-h)n-h(m-n) = 2\varepsilon$ relativ prim zu der Kathete $FG = \frac{m-n}{2}$, also das hier vorkommende $\delta = 1$.

Ist nun zuerst $\frac{m-n}{2} \equiv 0 \pmod 2$, so ist die Vorzeichensumme des Rechtecks $\equiv 0$ und ebenso nach (2.) von § 5 die des Dreiecks. Für $m \equiv n$ ist also

$$(1.) \qquad ((g|m))-((h|n)) \equiv\equiv 0.$$

Wenn $\frac{m-n}{2}$ ungerade ist, so ist die Summe der Vorzeichen des Rechtecks, weil der erste Gitterpunkt unten links das Zeichen $-(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ hat, $\equiv -(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2$. Der Gitterpunkt, der von F aus um $\frac{1}{2}$ nach rechts, um 1 nach oben zu liegt, hat das Vorzeichen $-(-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{h}{2}}$. Daher ist nach (1.) von § 5 die Summe der Vorzeichen in dem Dreieck FGC kongruent $-(-1)^{\frac{n-1}{2}+\frac{h}{2}} \cdot \left(\frac{\frac{g-h}{2}-1}{2}\right)^2$, da $\delta = 1$ ist. Für $m \not\equiv n$ ist deshalb

$$(2.) \quad ((g|m))-((h|n)) \equiv -(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left\{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + (-1)^{\frac{h}{2}} \cdot \left(\frac{\frac{g-h}{2}-1}{2}\right)^2\right\}.$$

Der Rest des Klammerausdruckes K in der geschweiften Klammer bleibt unverändert, wenn g und h sich um je ein Vielfaches von 8 ändern. Ist nun zuerst $\varepsilon = +1$ und $n \equiv 1$, so ist, wenn $h \equiv 0, 2, 4, 6 \pmod 8$ ist, wegen $gn-hm = 2$ zugleich bzw. $g \equiv 2, 0, 6, 4 \pmod 8$ und jedesmal ergibt sich $K \equiv 0$. Für $\varepsilon = +1$, $n \equiv 3$ ist mit $h \equiv 0, 2, 4, 6 \pmod 8$ bzw. $g \equiv 6, 4, 2, 0 \pmod 8$, und es ist immer $K \equiv 1$. Wenn $\varepsilon = -1$ ist, so folgt genau ebenso, daß für $n \equiv 1$ jetzt $K \equiv 1$, für $n \equiv 3$ aber $K \equiv 0$ ist. Die Formeln (1.) und (2.) lassen sich hiernach derart zusammenfassen, daß folgender Satz bewiesen ist:

Es ist unter der Voraussetzung $gn-hm=2\varepsilon$, $\varepsilon=\pm 1$,

$$(3.)\qquad ((g|m))-((h|n))\equiv\frac{\varepsilon-(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2}\left(\frac{m-n}{2}\right)^2.$$

Für den Modul 2 geht diese Kongruenz in eine solche für $(g|m)$ und $(h|n)$ über. Setzt man $g=2a$, $h=2b$ und schreibt statt der Kongruenz (mod 2) eine Gleichung mit *Jacobi*schen Zeichen, so erhält man

$$(4.)\qquad \left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{b}{n}\right)=\varepsilon^{\frac{m-n}{2}}\cdot(-1)^{\frac{m-3}{2}\cdot\frac{n-1}{2}},\quad an-bm=\varepsilon.$$

Diese Gleichung, die natürlich direkt durch eine viel einfachere geometrische Betrachtung hätte gefunden werden können, läßt sich auch aus dem quadratischen Reziprozitätsgesetz ableiten*). Denn es ist, weil m und n relativ prim sind,

$$\left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{b}{n}\right)=\left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{b}{n}\right)\left(\frac{m}{n}\right)\cdot(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}=\left(\frac{an}{m}\right)\left(\frac{bm}{n}\right)\cdot(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}$$

$$=\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)\cdot\left(\frac{-\varepsilon}{n}\right)\cdot(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}=\varepsilon^{\frac{m-n}{2}}\cdot(-1)^{\frac{m-3}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}.$$

Umgekehrt folgt das quadratische Reziprozitätsgesetz aus der Gleichung (4.), so daß deren direkte Herleitung einen neuen, verhältnismäßig originellen, Beweis dieses Gesetzes enthält, der allerdings nicht so einfach ist wie der *Eisenstein*sche Beweis, aber auch, weil die Zahlen g und h gerade sind, keiner Umformung der unmittelbar aus dem *Gauß*schen Lemma folgenden Summe von größten Ganzen bedarf.

Die Gleichung (4.) liefert übrigens ein theoretisch einfacheres Mittel zur Berechnung von $\left(\frac{a}{m}\right)$ als das Reziprozitätsgesetz, da man ohne jede Be-

---

*) Die Gleichung (4.) ist ein besonderer Fall der Formel

$$\left(\frac{a}{m}\right)\left(\frac{b}{n}\right)=\left(\frac{\gamma}{m}\right)\left(\frac{-\gamma}{n}\right)\cdot(-1)^{\frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}},$$

wenn $an-bm=\gamma$ ist und γ eine positive oder negative zu m und n teilerfremde Zahl bedeutet.

nutzung von weiteren Eigenschaften des *Jacobi*schen Zeichens von den größeren Zahlen a, m zu den kleineren b, n übergeht. Diese letzteren Zahlen ergeben sich als Zähler und Nenner des vorletzten Näherungsbruches bei der Entwicklung von $\frac{a}{m}$ in einen gewöhnlichen Kettenbruch. Sollte sich dabei zunächst, wenn a gerade ist, statt n eine gerade Zahl k einstellen, so muß man k durch $m-k$ und b durch $a-b$ ersetzen; es ist ja mit $ak-bm=\varepsilon$ zugleich $a(m-k)-(a-b)m=-\varepsilon$.

Die eigentliche Bedeutung der Kongruenz (3.) beruht aber weder auf diesen Bemerkungen, noch auf der durch sie bewirkten Zurückführung von $((g|m))$ auf das Zeichen $((h|n))$ mit kleineren Zahlen, sondern auf der Tatsache, daß sich aus ihr ein einfacher, rein arithmetischer Beweis des biquadratischen Reziprozitätsgesetzes für die komplexen Zahlen $m+gi$ und $n+hi$, die der Bedingung $gn-hm=2\varepsilon$ genügen, herleiten läßt. Auf diesen Gegenstand hoffe ich später zurückkommen zu können.

Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement.

Par M. *Georges Rémoundos* à Athènes.

---

1. Je me propose de développer ici quelques résultats servant à préciser un principe remarquable de la Mécanique rationnelle énoncé pour la première fois par M. *Appell* et concernant la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement. Le principe de M. *Appell* a été énoncé dans un article publié dans le *Bulletin mensuel de l'Association française pour l'avancement des Sciences* (Sur quelques questions de Mécanique rationnelle, No. 8, octobre 1905) et ensuite il a été développé dans une Note publiée dans ce Journal [*P. Appell*, Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement, Bd. 133, Heft 2].

L'énoncé de M. *Appell* consiste en ce que le travail dû au frottement tend vers zéro pour la plupart des systèmes usuels; j'établis ici les résultats suivants qui précisent le mode de variation du travail dû au frottement considéré comme infiniment petit, à savoir.

Si nous désignons avec M. *Appell* par Φ la quantité:

$$(1.) \qquad \Phi = f_1 N_1 \nu_1 + f_2 N_2 \nu_2 + \cdots + f_p N_p \nu_p$$

où $f_1, f_2, \cdots f_p$ sont les coefficients du frottement, $N_1, N_2, \cdots N_p$ les valeurs absolues des réactions normales, $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_p$ les valeurs des vitesses de glissement relatives des points matériels au contact dans les divers corps frottants associés deux à deux, nous obtenons les théorèmes suivants:

I. *Il existe une suite indéfinie de valeurs de t (croissant indéfiniment) satisfaisant à l'inégalité:*

$$\Phi < \frac{\lambda}{t}. \tag{2.}$$

Autrement dit, la quantité Φ, considérée comme infiniment petite est d'un ordre infinitésimal égal ou supérieur à celui de la quantité $\frac{\lambda}{t}$.

Si nous désignons par T la demi-force vive, Π le potentiel des forces intérieures, U le potentiel des forces extérieures, qui reste inférieur à une limite fixe L, nous avons le théorème suivant:

II. *L'étendue d'un intervalle de temps commençant par la valeur $t = t_0$ et dont aucune valeur ne satisfait à l'inégalité*

$$\Phi < \frac{\lambda}{t},$$

doit être inférieure à la quantité:

$$t_0 \left(e^{\frac{L}{\lambda}} e^{\frac{1}{\lambda} Q_{t_0}} - 1 \right)$$

L désignant la constante ci-dessus iniquée et Q_{t_0} la valeur pour $t = t_0$ de la quantité Q définie par l'égalité $Q = T + \Pi - U$.

III. *Il existe une suite indéfinie de valeurs du temps t (croissant indéfiniment) satisfaisant à l'inégalité:*

$$\Phi < \frac{\lambda \log t}{t}. \tag{3.}$$

IV. *Il existe une suite indéfinie de valeurs du temps t (croissant indéfiniment) satisfaisant à l'inégalité:*

$$\Phi < \frac{\lambda}{t (\log t) (\log_2 t) (\log_3 t) \cdots (\log_m t)} \tag{4.}$$

l'indice m étant quelconque et λ désignant toujours une constante quelconque.

Le théorème III est une conséquence du théorème I, puisqu'il fournit une limite plus grande que $\frac{\lambda}{t}$; il présente cependant un intérêt particulier parce que l'emploi de la limite $\frac{\lambda \log t}{t}$ donne lieu à une réduction remarquable des intervalles de temps *exceptionnels*, c'est-à-dire des intervalles qui font défaut au principe de M. *Appell*.

Une partie de ces résultats a été communiquée à l'Académie des sciences de Paris et un résumé est publié dans les *Comptes rendus* (3 août 1908).

2. Nous prenons, avec M. *Appell*, comme point de départ l'équation du théorème des forces vives écrite sous la forme:

$$d(T+\Pi-U)=-\Phi\,dt \tag{5.}$$

Φ désignant la quantité ci-dessus définie. Soit $\varphi(t)$ une fonction qui tend vers zéro*), lorsque le temps t croît indéfiniment, et dont l'intégrale $\int\varphi\,dt$ tend vers l'infini restant toujours positive et supposons que nous ayons l'inégalité:

$$\Phi > \varphi(t)$$

à partir d'une valeur du temps t (l'inégalité subsistant pour toutes les valeurs suivantes de t); il en résulterait:

$$d(T+\Pi-U)<-\varphi(t)\,dt \tag{6.}$$

ou bien

$$T+\Pi-U<-\int\varphi(t)\,dt+C \qquad (C \text{ étant une constante})$$

d'où

$$T+\Pi<-\int\varphi(t)\,dt+C+L, \tag{7.}$$

puisque le potentiel U est, par hypothèse, inférieure à une quantité fixe L. L'intégrale $\int\varphi(t)dt$ tendant vers l'infini, lorsque le temps t croît indé-

*) ou bien restant finie.

finiment, l'inégalité (7.) dévient visiblement impossible à partir d'une certaine valeur du temps t, parce que les quantités T et Π sont toujours positives.

En employant la fonction $\varphi(t) = \lambda$, où λ désigne une constante, nous obtenons le résultat de M. *Appell* (Ce Journal, Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement, Bd. 133, Heft 2).

L'emploi de la fonction $\varphi(t) = \frac{\lambda}{t}$, où λ désigne aussi une constante, nous conduit au théorème I, l'emploi de la fonction $\varphi(t) = \frac{\lambda \log t}{t}$ nous conduit au théorème III et enfin l'emploi de la fonction*):

$$(8.) \qquad \varphi_m(t) = \frac{\lambda}{t(\log t)(\log_2 t)(\log_3 t)\cdots(\log_m t)}$$

nous conduit au théorème IV; nous obtenons ainsi d'un coup ces trois théorèmes énoncés dans le No. 1 ainsi que le résultat obtenu par M. *Appell*. La formule (8.) nous fournit une suite indéfinie de fonctions tendant vers zéro, lorsque le temps t croît indéfiniment, qui peuvent servir de limites pour le travail dû au frottement. Ces fonctions $\varphi_m(t)$ sont d'un ordre infinitésimal de plus en plus croissant: j'entends par là que le rapport $\varphi_m(t) : \varphi_{m-1}(t)$ tend vers zéro, lorsque t croît indéfiniment, quel que soit l'indice m. Nous avons, donc, une précision remarquable du mode, dont tend vers zéro le travail dû au frottement.

L'étendue des intervalles exceptionnels.

3. Dans le cas où la quantité Φ varie en oscillant, nous ne pouvons rien dire à priori de sa limite supérieure (Note citée); en établissant cependant le théorème II nous obtenons un résultat intéressant concernant la variation de la limite supérieure et fournissant une limite supérieure de l'étendue des intervalles exceptionnels, c'est-à-dire des intervalles de temps, dont aucune valeur ne satisfait à l'inégalité $\Phi < \frac{\lambda}{t}$.

---

*) Son intégrale est, en effet, égale à $\lambda \log_{m+1} t + C$ et tend vers l'infini pour $t = \infty$.

Considérons un tel intervalle Δ et soient t_0 et t_1 $(t_1 > t_0)$ deux valeurs de cet intervalle: nous aurons:

$$(9.) \qquad \Phi > \frac{\lambda}{t}, \qquad -\Phi < -\frac{\lambda}{t}, \qquad d(T+\Pi-U) < -\frac{\lambda\, dt}{t},$$

$$(T+\Pi-U)_{t_1} - (T+\Pi-U)_{t_0} < -\lambda(\log t_1 - \log t_0)$$

ou bien

$$Q_{t_1} - Q_{t_0} < -\lambda \log \frac{t_1}{t_0}$$

en posant $Q = T+\Pi-U$ et en désignant par Q_{t_0} et Q_{t_1} les valeurs pour $t=t_0$ et $t=t_1$ de la quantité Q.

L'inégalité (9.) peut s'écrire aussi de la façon suivante:

$$(T+\Pi)_{t_1} - Q_{t_0} < L - \lambda \log \frac{t_1}{t_0}$$

ou bien

$$(10.) \qquad (T+\Pi)_{t_1} < L + Q_{t_0} - \lambda \log \frac{t_1}{t_0},$$

puisque nous avons, par hypothèse, l'inégalité $U < L$.

Le premier membre de l'inégalité (10.) étant toujours positif, nous en concluons:

$$L + Q_{t_0} > \lambda \log \frac{t_1}{t_0},$$

$$(10^{a}.) \qquad \log \frac{t_1}{t_0} < \frac{1}{\lambda} L + \frac{1}{\lambda} Q_{t_0},$$

$$\frac{t_1}{t_0} < e^{\frac{L}{\lambda}}\, e^{\frac{1}{\lambda} Q_{t_0}}$$

ou bien

$$t_1 - t_0 < t_0 \left(e^{\frac{L}{\lambda}}\, e^{\frac{1}{\lambda} Q_{t_0}} - 1 \right).$$

Si, donc, nous désignons par E l'étendue de l'intervalle exceptionnel commençant par la valeur $t = t_0$, nous aurons:

$$E < t_0\left(e^{\frac{L}{\lambda}}\, e^{\frac{1}{\lambda}Q_{t_0}} - 1\right). \tag{11.}$$

Si la quantité $Q = T + \Pi - U$ reste finie, le théorème ci-dessus démontré montre que le rapport $t_1 : t_0$ des extrémités des intervalles exceptionnels reste fini, ce qui donne un renseignement sur l'étendue de ces intervalles. Dans ce qui va suivre, nous supposerons que la quantité Q reste finie. La formule (11.) exprime le théorème II.

L'avantage de la limite $\frac{\lambda \log t}{t}$.

4. Le résultat obtenu dans le No. précédent ne nous permet pas de considérer comme négligeable l'étendue d'un intervalle exceptionnel suffisamment éloigné par rapport au temps qui s'est écoulé jusqu'au commencement de cet intervalle; la formule (11.) ne nous permet pas, en effet, de conclure que le rapport $E : t_0$ tend vers zéro, lorsque t_0 tend vers l'infini. Nous démontrerons, donc, qu'il est possible d'avoir cette conclusion par l'emploi de la fonction: $\frac{\lambda \log t}{t}$.

Supposons que la quantité Φ varie en oscillant et qu'il y ait une infinité d'intervalles exceptionnels par rapport à l'inégalité:

$$\Phi < \frac{\lambda \log t}{t}.$$

Si nous désignons par t_n et t'_n le commencement et la valeur finale de l'intervalle exceptionnel I_n de rang n, nous remarquons que toute valeur de cet intervalle satisfait à la formule:

$$\Phi \geqq \frac{\lambda \log t_n}{t} \tag{12.}$$

et, par conséquent, l'étendue de cet intervalle ne saurait être supérieure à celle de l'intervalle de temps exceptionnel commençant par la valeur t_n et relatif à l'inégalité:

$$\Phi < \frac{\varkappa}{t}, \qquad \varkappa = \lambda \log t_n.$$

Or, comme nous avons démontré dans le No. précédent, l'étendue de ce dernier intervalle est inférieure à

$$t_n\left(e^{\frac{L}{\varkappa}}\, e^{\frac{1}{\varkappa}Q_{t_n}} - 1\right).$$

Nous aurons, donc:

$$E_n < t_n\left(e^{\frac{L}{\varkappa}}\, e^{\frac{1}{\varkappa}Q_{t_n}} - 1\right), \tag{13.}$$

E_n désignant l'étendue de l'intervalle I_n. Il en résulte:

$$\frac{E_n}{t_n} < e^{\frac{L}{\varkappa}}\, e^{\frac{1}{\varkappa}Q_{t_n}} - 1.$$

Le second membre de cette inégalité tend vers zéro, lorsque le temps t_n tend vers l'infini, puisque la quantité $\varkappa$ tend vers l'infini, tandis que Q_{t_n} reste fini; nous en concluons que le rapport $E_n : t_n$ tend aussi vers zéro et, par conséquent, l'étendue E_n est négligeable par rapport au temps t_n. *L'emploi, donc, de la limite* $\frac{\lambda \log t}{t}$, *qui est d'un ordre de grandeur supérieur à* $\frac{\lambda}{t}$, *présente l'avantage que l'étendue d'un intervalle exceptionnel suffisamment éloigné est négligeable par rapport au temps, qui s'est écoulé jusqu'au commencement (ou jusqu'à la fin) de cet intervalle.*

Les remarques de M. Daniele.

5. Dans un travail publié récemment dans le *Nuovo Cimento* (Serie V, vol. XV, fascicolo di Giugno 1908, Sulla tendenza dei sistemi materiali a sfuggire al vincoli con attrito) M. *Daniele* a fait des remarques intéressantes sur le principe de M. *Appell:* L'égalité

$$\Phi = f_1 N_1 \nu_1 + f_2 N_2 \nu_2 + \cdots + f_p N_p \nu_p \tag{14.}$$

montre que l'annulation de chaque terme $f_m N_m \nu_m$ se fait par l'annulation ou bien de la réaction normale N_m ou bien de la vitesse ν_m ou bien de

toutes les deux. M. *Daniele* a remarqué avec raison que le cas, où l'évanouissement du travail dû au frottement provient seulement de l'annulation des vitesses $v_1, v_2, \cdots v_p$, n'est pas celui qui nous intéresse beaucoup au point de vue du principe énoncé par M. *Appell*, et il serait intéressant de donner des exemples où une, au moins, des réactions normales N_m tend vers zéro. M. *Daniele* a donné un tel exemple. Les exemples cités par M. M. *Appell* (Note citée) et *Lecornu* (Bull. de la Soc. math. de Fr. Sur l'extinction du frottement, t. 35 [1907]) se rapportent au cas où l'évanouissement de Φ est dû seulement à l'annulation des vitesses $v_1, v_2, \cdots v_p$. Je tiens à observer ici que le principe de M. *Appell* est exprimé comme une tendance des systèmes matériels à *échapper* au frottement et non pas à *annuler* le frottement: ils échappent au frottement par l'annulation du travail dû au frottement. Il en résulte que pour le principe de M. *Appell* (sous la forme énoncée par son auteur) tous les cas sont également intéressants et que les exemples donnés par M. *Daniele* dans son travail ci-dessus cité présentent un intérêt particulier pour *un cas particulier du principe*, celui qui correspond à l'évanouissement du frottement lui-même et non seulement de son travail.

Athènes, le 25 décembre 1908.

Georges J. Rémoundos.

Zusatz zu der Abhandlung „Zur Determinanten-Lehre“ des Herrn *L. Saalschütz* in Band 134 ds. Journals.

Aus einer mir freundlich zugesandten Bemerkung des Herrn *Esch* (Valkenburg, Limb. Holland) erfuhr ich, daß der Satz in § 1 meiner Arbeit bereits von *Brioschi* (ds. J. Bd. 52 S. 133 ff.) aufgestellt worden ist.

Auf den weiteren Inhalt meiner Arbeit ist die obige Prioritäts-Anerkennung, soviel ich sehe, ohne Einfluß.

L. Saalschütz.

Ein neues Bildnis von *Dirichlet.*

Von einer bisher unveröffentlichten Photographie *Dirichlet*s aus des Meisters letzten Lebensjahren, die alle andern durch Schönheit und Lebenstreue übertrifft, soll eine Vervielfältigung in Originalgröße, etwa 14/18 cm, in Heliogravüre hergestellt werden, falls sich eine genügende Anzahl von Subskribenten meldet. Die Originalphotographie befindet sich im Besitze von Fräulein *Lotte Nelson* in Darmstadt, Moosbergstr. 43; Interessenten wollen die gewünschte Anzahl von Exemplaren (zum Preise von 2 Mark) bei dieser Dame bestellen.

Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques.

Deuxième Mémoire.

Recherches sur les parallélоèdres primitifs.

Par M. *Georges Voronoï* à Varsovie.

Seconde partie.

Domaines de formes quadratiques correspondant aux différents types de parallélоèdres primitifs.

Section IV.

Types différents de parallélоèdres primitifs.

Sur le nombre des faces à $n-1$ dimensions d'un parallélоèdre primitif.

55. *Théorème. Le nombre des faces à $n-1$ dimensions d'un parallélоèdre primitif est égal à $2(2^n-1)$.*

Supposons qu'un parallélоèdre primitif R correspondant à une forme quadratique positive $\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j$ soit défini par les inégalités indépendantes

$$(1.)\qquad \Sigma\Sigma a_{ij}l_{ik}l_{jk} \pm 2\Sigma a_i l_{ik} \geqq 0. \qquad (k=1,2,\ldots\tau)$$

Nous avons vu au n° 48 que chaque système

$$(2.)\qquad \pm(l_{1k}, l_{2k}, \ldots l_{nk}), \qquad (k=1,2,\ldots\tau)$$

représente le minimum de la forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j$ dans l'ensemble

composé de tous les systèmes de nombres entiers qui sont congrus au système $\pm(l_{ik})$ par rapport au module 2. La forme $\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j$ ne possède dans cet ensemble que deux représentations $\pm(l_{ik})$ du minimum.

Partageons l'ensemble E, composé de tous les systèmes (x_i) de nombres entiers $x_1, x_2, \ldots x_n$, en 2^n classes

$$E_0, E_1, \ldots E_m \text{ où } m = 2^n - 1$$

par rapport au module 2 et supposons que l'ensemble E_0 soit composé de systèmes dont les éléments ont le diviseur commun 2.

Tous les systèmes (2.) n'appartiennent qu'aux ensembles différents

$$E_1, E_2, \ldots E_m \text{ où } m = 2^n - 1.$$

Il s'ensuit que

$$\tau \leqq 2^n - 1.$$

Je dis que $\tau = 2^n - 1$. Admettons que parmi les systèmes (2.) ne se trouvent pas les systèmes appartenant à un ensemble E_h et déterminons le minimum de la forme $\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j$ dans l'ensemble E_h. Soit (l_i) une représentation de ce minimum.

Désignons par

$$(3.) \qquad (\alpha_{i1}), (\alpha_{i2}), \ldots (\alpha_{is})$$

les sommets du parallélоèdre R défini par les inégalités (1.) et examinons les valeurs de la fonction $\Sigma\Sigma a_{ij}l_il_j + 2\Sigma\alpha_i l_i$ qui correspondent aux différents sommets (3.). Supposons que la somme $\Sigma\Sigma a_{ij}l_il_j + 2\Sigma\alpha_{ik}l_i$ soit la plus petite.

En vertu de la supposition faite, on aura les inégalités

$$(4.) \qquad \Sigma\Sigma a_{ij}l_il_j + 2\Sigma\alpha_{ir}l_i \geqq \Sigma\Sigma a_{ij}l_il_j + 2\Sigma\alpha_{ik}l_i. \qquad (r = 1, 2, \ldots s)$$

En observant que chaque point (α_i) appartenant au parallélоèdre R peut être déterminé par les égalités

$$\alpha_i = \sum_{r=1}^{s} \vartheta_r \alpha_{ir} \text{ où } \Sigma\vartheta_r = 1 \text{ et } \vartheta_r \geqq 0, \qquad (r = 1, 2, \ldots s)$$

on déduira des inégalités (4.) une inégalité

$$(5.) \qquad \Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j + 2 \Sigma \alpha_i l_i \geqq \Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j + 2 \Sigma \alpha_{ik} l_i$$

qui subsiste, quel que soit un point (α_i) appartenant au paralléloèdre R. Le système (l_i) qui représente le minimum de la forme $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ dans l'ensemble E_h vérifie l'inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j - \Sigma\Sigma a_{ij} x_i l_j \geqq 0$$

dans l'ensemble E. Il en résulte que le point

$$\xi_i = -\tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} l_j$$

appartient au paralléloèdre R. En faisant dans l'inégalité (5.) $\alpha_i = \xi_i$, on obtient

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j + 2 \Sigma \alpha_{ik} l_i \leqq 0.$$

Le sommet (α_{ik}) du paralléloèdre R vérifie l'inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j + 2 \Sigma \alpha_{ik} l_i \geqq 0,$$

donc il est nécessaire que

$$(6.) \qquad \Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j + 2 \Sigma \alpha_{ik} l_i = 0.$$

Cela posé, observons que le sommet (α_{ik}) du paralléloèdre primitif est simple.

Désignons par

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_{ir}^{(k)} l_{jr}^{(k)} + 2 \Sigma \alpha_{ik} l_{ir}^{(k)} = 0, \qquad (r=1, 2, \ldots n)$$

n équations qui définissent le sommet (α_{ik}) dans le paralléloèdre R. Comme le sommet (α_{ik}) est simple, on aura une inégalité

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2 \Sigma \alpha_{ik} x_i > 0,$$

quelles que soient les valeurs entières de $x_1, x_2, \ldots x_n$, le système (0) et les systèmes

$$(7.) \qquad (l_{i1}^{(k)}), \ (l_{i2}^{(k)}), \ \ldots (l_{in}^{(k)})$$

étant exclus. En vertu de l'égalité (6.), le système (l_i) se trouve parmi les systèms (7.) qui tous appartiennent à la série (2.).

Il est donc démontré que

$$\tau = 2^n - 1$$

et que le nombre des faces à $n-1$ dimensions du paralléloèdre R est égal à

$$2\tau = 2\,(2^n - 1).$$

Définition du type de paralléloèdres primitifs.

56. Examinons un paralléloèdre primitif R déterminé à l'aide des inégalités indépendantes

$$\Sigma\Sigma a_{ij}\, l_{ik}\, l_{jk} + 2\,\Sigma a_i\, l_{ik} \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \ldots \sigma \text{ où } \sigma = 2\,(2^n-1))$$

Désignons par

$$(\alpha_{i1}),\ (\alpha_{i2}),\ \ldots\ (\alpha_{is})$$

les sommets du paralléloèdre R. On les déterminera à l'aide des équations

$$\Sigma\Sigma a_{ij}\, l_{ir}^{(k)}\, l_{jr}^{(k)} + 2\,\Sigma \alpha_{ik}\, l_{ir}^{(k)} = 0. \qquad (r=1, 2, \ldots n,\ k=1, 2, \ldots s)$$

Chaque sommet (α_{ik}) $(k = 1, 2, \ldots s)$ est caractérisé par n systèmes de nombres entiers

$$(1.) \qquad (l_{i\,1}^{(k)}),\ (l_{i\,2}^{(k)}),\ \ldots\ (l_{i\,n}^{(k)}), \qquad (k=1, 2, \ldots s)$$

dont le déterminant $\pm\omega_k$ ne s'annule pas.

Désignons, pour abréger, n systèmes (1.) par un symbole

$$\{l_{ir}^{(k)}\}.$$

Tous les sommets du paralléloèdre primitif R seront caractérisés par un ensemble de symboles

$$(2.) \qquad \{l_{ir}^{(1)}\},\ \{l_{ir}^{(2)}\},\ \ldots \{l_{ir}^{(s)}\}.$$

Cela posé, examinons un autre paralléloèdre primitif R' correspondant

à une autre forme quadratique positive $\Sigma\Sigma a'_{ij} x_i x_j$. Il peut arriver que tous les sommets du paralléloèdre R' seront aussi caractérisés par les symboles (2.). On dira dans ce cas que les deux paralléloèdres R et R' appartiennent au même type.

Définition. On appellera les différents paralléloèdres dont tous les sommets sont caractérisés par l'ensemble des symboles (2.) *„appartenant au même type“.*

57. On peut caractériser un type de paralléloèdres primitifs de plusieurs manières.

Envisageons un ensemble (R) des paralléloèdres primitifs congruents qui correspond à une forme quadratique positive $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$.

Tous les sommets des paralléloèdres appartenant à l'ensemble (R) peuvent être partagés en classes de sommets congruents. Désignons par τ le nombre de sommets incongruents appartenant aux différentes classes.

Chaque sommet d'un paralléloèdre primitif est congruent à n sommets de ce paralléloèdre, il en résulte que

$$s = (n+1)\,\tau .$$

Soit (α_i) un sommet quelconque des paralléloèdres de l'ensemble (R). On le définira à l'aide de $n+1$ équations

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_{ik} l_{jk} + 2\,\Sigma a_i l_{ik} = A . \qquad (3.) \qquad (k=0, 1, 2, \ldots n)$$

Les $n+1$ systèmes

$$(l_{i0}),\ (l_{i1}), \cdots (l_{in})$$

caractérisent $n+1$ paralléloèdres de l'ensemble (R) qui sont contigus par le sommet (α_i). En désignant par (l_i) un système de nombres entiers arbitraires, on caractérisera par les systèmes

$$(l_{i0}+l_i),\ (l_{i1}+l_i), \cdots (l_{in}+l_i) \qquad (4.)$$

tous les sommets congruents des paralléloèdres de l'ensemble (R).

En attribuant aux variables $l_1, l_2, \dots l_n$ les valeurs quelconques arbitraires, on caractérisera par $n+1$ systèmes (4.) une classe de sommets congruents.

On en conclut qu'un type de parallélоèdres primitifs peut être caractérisé par τ systèmes (4.).

58. Pour avoir plus de commodité dans les notations, introduisons dans nos recherches les fonctions linéaires

$$u = \sum_{i=1}^{n} l_i x_i, \text{ et } u_k = \sum_{i=1}^{n} l_{ik} x_i. \qquad (k = 0, 1, 2 \dots n)$$

On dira que le symbole $(u_0, u_1, \dots u_n)$ caractérise le sommet (α_i) déterminé par les équations (3.); le symbole $(u_0 + u, u_1 + u, \dots u_n + u)$, u étant une fonction linéaire à coefficients entiers arbitraires, caractérise un sommet congruent au sommet (α_i).

Supposons qu'on ait caractérisé par les symboles

$$(5.) \qquad (u_0^{(k)}, u_1^{(k)}, \dots u_n^{(k)}), \qquad (k = 1, 2, \dots \tau)$$

τ sommets incongruents des parallélоèdres primitifs appartenant à l'ensemble (R). On dira que l'ensemble de symboles (5.) caractérise un type de parallélоèdres primitifs.

59. Examinons les faces à différentes dimensions des parallélоèdres primitifs appartenant au même type.

Soit $P(\nu)$ une face à ν dimensions $(\nu = 0, 1, 2, \dots n-1)$ des parallélоèdres de l'ensemble (R) définie par les équations

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_{ik} l_{jk} + 2\Sigma\alpha_i l_{ik} = \Sigma\Sigma a_{ij} l_{i0} + 2\Sigma\alpha_i l_{i0}. \qquad (k = 1, 2, \dots n-\nu)$$

On caractérisera cette face par $n+1-\nu$ systèmes

$$(l_{i0}), (l_{i1}), \dots (l_{i, n-\nu})$$

ou par $n+1-\nu$ fonctions linéaires correspondantes

$$u_0, u_1, \dots u_{n-\nu}.$$

Toutes les faces à ν dimensions des paralléloèdres de l'ensemble (R) qui sont congruentes à la face $P(\nu)$ seront caractérisées par les systèmes

$$(l_{i0}+l_i),\ (l_{i1}+l_i),\ \dots\ (l_{i,n-\nu}+l_i)$$

ou par les fonctions linéaires correspondantes

$$u_0+u,\ u_1+u,\ \dots\ u_{n-\nu}+u.$$

En faisant, par exemple, $l_i=-l_{i0}$, on obtient $n-\nu$ systèmes

$$(6.)\qquad (l_{i1}-l_{i0}),\ (l_{i2}-l_{i0}),\ \dots\ (l_{i,n-\nu}-l_{i0})$$

qui jouissent de la propriété suivante: tous les déterminants de l'ordre $(n-\nu)^2$ qu'on peut former de $n-\nu$ systèmes (6.) ne s'annulent pas à la fois. Désignons par $\omega^{(n-\nu)}$ le plus grand diviseur commun de ces déterminants. En posant

$$(7.)\qquad x_i=\sum_{k=1}^{n-\nu}(l_{ik}-l_{i0})\,\xi_k,$$

on présentera un système (x_i) de nombres entiers par les formes linéaires où $\xi_1,\xi_2,\dots\xi_{n-\nu}$ sont des nombres entiers ou rationnels qui appartiennent à $\omega^{(n-\nu)}$ ensembles

$$(8.)\qquad \xi_k=\vartheta_{kr}+y_k \qquad (k=1,2,\dots n-\nu;\ r=1,2,\dots\omega^{(n-\nu)})$$

où $y_1,y_2,\dots y_{n-\nu}$ sont des nombres entiers arbitraires. Parmi les ensembles (8.) se trouve un ensemble où $\vartheta_{kr}=0$, $k=1,2,\dots n-\nu$ et qui est composé de valeurs entières de $\xi_1,\ \xi_2,\dots\xi_{n-\nu}$.

Dans le cas $\omega^{(n-\nu)}=1$, les égalités (7.) ne sont possibles qu'à condition que les nombres $\xi_1,\ \xi_2,\dots\xi_{n-\nu}$ soient entiers.

Les ensembles (8.) jouent un rôle important dans les recherches ultérieures.

Désignons par le symbole $\sigma_{n-\nu}$ le nombre de faces incongruentes à ν dimensions des paralléloèdres primitifs appartenant au type examiné.

En désignant par le symbole S_ν le nombre de faces à ν dimensions d'un paralléloèdre primitif correspondant, on aura une formule

$$S_\nu = (n+1-\nu)\,\sigma_{n-\nu}. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1) \tag{9.}$$

Définition de l'ensemble (L) de simplexes caractérisant un type de paralléloèdres primitifs.

60. Supposons que $n+1$ systèmes

$$(l_{i0}),\ (l_{i1}), \ldots (l_{in}) \tag{1.}$$

caractérisent un sommet des paralléloèdres primitifs appartenant au type examiné.

Définition I. *On appellera corrélatif au sommet des paralléloèdres primitifs caractérisé par les systèmes* (1.) *un simplexe L ayant* $n+1$ *sommets*

$$(l_{i0}), (l_{i1}), \ldots (l_{in}).$$

Le simplexe L présente un ensemble des points déterminés par les égalités

$$x_i = \sum_{k=0}^{n} \vartheta_k l_{ik} \quad \text{où} \quad \sum_{k=0}^{n} \vartheta_k = 1 \quad \text{et} \quad \vartheta_k \geqq 0. \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n)$$

Désignons par (L) l'ensemble de simplexes corrélatifs aux différents sommets d'un ensemble (R) des paralléloèdres primitifs appartenant au type examiné.

Définition II. *On dira qu'un type de paralléloèdres primitifs est caractérisé par l'ensemble* (L) *de simplexes.*

On appellera congruents deux simplexes caractérisés par les sommets

$$(l_{i0}),\ (l_{i1}), \ldots (l_{in}) \quad \text{et} \quad (l_{i0}+l_i), (l_{i1}+l_i), \ldots (l_{in}+l_i),$$

$l_1, l_2, \ldots l_n$ étant des nombres entiers arbitraires.

Tous les simplexes de l'ensemble (L) peuvent être partagés en classes

de simplexes congruents; le nombre de classes s'exprime par le symbole σ_n défini par la formule (9.) du n°. précédent.

A l'aide des égalités

$$x_i = \sum_{k=0}^{n-\nu} \vartheta_k l_{ik} \quad \text{où} \quad \sum_{k=0}^{n-\nu} \vartheta_k = 1 \text{ et } \vartheta_k \geqq 0, \qquad (k=0,1,2,\ldots n-\nu)$$

on déterminera une face à $n-\nu$ dimensions du simplexe L qui est corrélative à la face à ν dimensions des paralléloèdres caractérisée par les systèmes

$$(l_{i0}),\ (l_{i1}),\ldots(l_{in-\nu}).$$

On en conclut que le nombre de faces incongruentes à $n-\nu$ dimensions de l'ensemble (L) de simplexes s'exprime par le symbole $\sigma_{n-\nu}$ $(\nu=0,1,2,\ldots n-1)$.

Comme tous les sommets des simplexes de l'ensemble (L) sont congruents, on posera $\sigma_0=1$, et la formule (9.) du n° 59

$$S_\nu = (n+1-\nu)\,\sigma_{n-\nu}$$

subsistera pour les valeurs de $\nu=0,1,2,\ldots n$, à condition qu'on ait posé $S_n=1$.

61. *Théorème* I. *L'ensemble (L) de simplexes remplit uniformément l'espace à n dimensions.*

Supposons qu'un point (x_i) soit intérieur à une face du simplexe L caractérisé par les systèmes

(2.) $$(l_{i0}),\ (l_{i1}),\ldots(l_{i\nu}).$$

On aura

(3.) $$x_i = \sum_{k=0}^{\nu} \vartheta_k l_{ik} \text{ où } \sum_{k=0}^{\nu} \vartheta_k = 1 \text{ et } \vartheta_k > 0. \qquad (k=0,1,2,\ldots\nu)$$

Admettons que le point (x_i) soit intérieur à une face à ν' dimensions

d'un autre simplexe L' caractérisé par les sommets

$$(l'_{i0}),\ (l'_{i1}),\ \ldots\ (l'_{ir'}).$$

On peut poser

$$(4.)\qquad x_i = \sum_{k=0}^{r'} \vartheta'_k\, l'_{ik} \text{ où } \sum_{k=0}^{r'} \vartheta'_k = 1 \text{ et } \vartheta'_k > 0. \qquad (k=0,1,2,\ldots r')$$

Soit $\Sigma\Sigma a_{ij}\, x_i\, x_j$ une forme quadratique positive qui définit un ensemble (R) de parallèloèdres primitifs appartenant au type examiné.

Désignons par (α_i) et (α'_i) deux sommets des parallèloèdres de l'ensemble (R) qui sont corrélatifs aux simplexes L et L'. On aura les égalités

$$(5.)\qquad \begin{cases} \Sigma\Sigma a_{ij}\, l_{ik}\, l_{jk} + 2\,\Sigma\alpha_i\, l_{ik} = A, \\ \Sigma\Sigma a_{ij}\, l'_{ik}\, l'_{jk} + 2\,\Sigma\alpha'_i\, l'_{ik} = A'. \end{cases} \qquad (k=0,1,2,\ldots n)$$

En posant

$$(6.)\qquad \begin{cases} \Sigma\Sigma a_{ij}\, l'_{ik}\, l'_{jk} + 2\,\Sigma\alpha_i\, l'_{ik} = A + \varrho_k, \\ \Sigma\Sigma a_{ij}\, l_{ik}\, l_{jk} + 2\,\Sigma\alpha'_i\, l_{ik} = A' + \varrho'_k, \end{cases} \qquad (k=0,1,2,\ldots n)$$

on aura les inégalités

$$\varrho_k \geqq 0 \quad \text{et} \quad \varrho'_k \geqq 0. \qquad (k=0,1,2,\ldots n)$$

Des égalités (5.) et (6.) on tire

$$\begin{cases} A' - A + 2\,\Sigma(\alpha_i - \alpha'_i)\, l'_{ik} = \varrho_k, \\ A - A' + 2\,\Sigma(\alpha'_i - \alpha_i)\, l_{ik} = \varrho'_k. \end{cases} \qquad (k=0,1,2,\ldots n)$$

En vertu des égalités (3.) et (4.), on obtient

$$A' - A + 2\Sigma(\alpha_i - \alpha_i')\, x_i = \sum_{k=0}^{\nu'} \varrho_k \vartheta_k',$$

$$A - A' + 2\Sigma(\alpha_i' - \alpha_i)\, x_i = \sum_{k=0}^{\nu} \varrho_k' \vartheta_k.$$

En faisant la somme de ces égalités, on trouve

$$\sum_{k=0}^{\nu'} \varrho_k \vartheta_k' + \sum_{k=0}^{\nu} \varrho_k' \vartheta_k = 0.$$

Il s'ensuit, à cause de (3.) et (4.), que

$$\varrho_k = 0, \ (k=0,1,2,\ldots\nu') \text{ et } \varrho_k' = 0. \ (k=0,1,2,\ldots\nu)$$

Observons que l'égalité $\varrho_k = 0$ n'est possible qu'à condition que le système (l_{ik}') se trouve parmi les sommets du simplexe L, de même, l'égalité $\varrho_k' = 0$ n'est possible qu'à condition que le système (l_{ik}) se trouve parmi les sommets du simplexe L'.

On en conclut que les systèmes

(7.) $$(l_{i0}'),\ (l_{i1}'),\ \ldots\ (l_{i\nu'}')$$

caractérisent une facc du simplexe L et que les systèmes (2.) caractérisent une face du simplexe L'. Comme un point (x_i) ne peut être intérieur à deux faces différentes d'un même simplexe, il en résulte que les systèmes (2.) et (7.) coïncident; donc les deux simplexes L et L' sont contigus par la face à ν dimensions caractérisée par les systèmes (2.).

Il reste à démontrer que chaque point (x_i) de l'espace à n dimensions appartient au moins à un simplexe de l'ensemble (L).

Pour le démontrer, prenons un point quelconque (ξ_i) qui est intérieur au simplexe L et menons une courbe quelconque C qui joint les points (ξ_i) et (x_i). Je dis que tous les points de la coube C seront situés dans les simplexes

$$L, L' \ldots L^{(m)}$$

appartenant à l'ensemble (L). En effet, supposons que le point (x_i)

n'appartienne pas au simplexe L. La courbe C franchira en un point (ξ_i') la frontière du simplexe L et passera par un simplexe L' qui est contigu au simplexe L par une face à un nombre quelconque de dimensions et ainsi de suite.

62. *Théorème* II. *Un point (x_i) dont les éléments $x_1, x_2, \ldots x_n$ sont des nombres entiers ne peut être qu'un sommet des simplexes de l'ensemble (L).*

Observons qu'il existe des simplexes de l'ensemble (L) qui possèdent le sommet (0); le nombre de ces simplexes s'exprime par le symbole S_0.

En effectuant les translations de ces simplexes le long du vecteur $[x_i]$, on obtiendra S_0 simplexes qui possèdent le sommet (x_i). En vertu du théorème I, le point (x_i) ne peut appartenir à d'autres simplexes de l'ensemble (L).

Corollaire. Supposons qu'un point (x_i) dont les éléments $x_1, x_2, \ldots x_n$ sont des nombres entiers ne se trouve pas parmi les sommets

$$(l_{i0}),\ (l_{i1}), \ldots (l_{in})$$

d'un simplexe L. En posant

$$x_i = \sum_{k=0}^{n} \vartheta_k l_{ik} \text{ où } \sum_{k=0}^{n} \vartheta_k = 1,$$

on aura parmi les nombres $\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots \vartheta_n$ au moins un nombre négatif.

Propriétés des symboles S_ν et σ_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$.

63. Prenons un nombre entier positif quelconque m et envisageons un ensemble K de points qui sont congruents à m^n points

$$\left(\frac{g_1}{m}, \frac{g_2}{m}, \ldots \frac{g_n}{m}\right)$$

qu'on obtient en attribuant aux nombres $g_1, g_2, \ldots g_n$ les valeurs entières vérifiant les inégalités

$$0 \leqq g_k < m. \qquad (k=1, 2, \ldots n)$$

Prenons un point quelconque $\left(\frac{x_i}{m}\right)$ de l'ensemble K et supposons que le point $\left(\frac{x_i}{m}\right)$ soit intérieur à une face quelconque $P(\nu)$ des simplexes de l'ensemble (L) $(\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$. En vertu du théorème I du n° 61, tous les points de l'ensemble K qui sont intérieurs à la face $P(\nu)$ ne peuvent être congruents.

Désignons par

$$P_k(\nu), \qquad (k=1, 2 \ldots \sigma_\nu\,;\ \nu=0, 1, 2 \ldots n)$$

les différentes faces incongruentes des simplexes de l'ensemble (L) et par le symbole

$$m_k^{(\nu)} \qquad (k=1, 2 \ldots \sigma_\nu;\ \nu=0, 1, 2 \ldots n)$$

désignons le nombre des points de l'ensemble K qui sont intérieurs à la face $P_k(\nu)$. On aura une formule

$$(1.) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{k=1}^{\sigma_\nu} m_k^{(\nu)} = m^n.$$

64. Il est aisé de déterminer la valeur du symbole $m_k^{(\nu)}$. Désignons par

$$(l_{i0}^{(k)}),\ (l_{i1}^{(k)}), \ldots (l_{i\nu}^{(k)})$$

les sommets de la face $P_k(\nu)$ et posons

$$\frac{x_i}{m} = \sum_{r=0}^{\nu} \vartheta_r l_{ir}^{(k)} \text{ où } \Sigma\vartheta_r = 1 \text{ et } \vartheta_r > 0. \qquad (r=0, 1, 2 \ldots \nu)$$

Ces égalités peuvent s'écrire

$$\frac{x_i}{m} - l_{i0}^{(k)} = \sum_{r=1}^{\nu} \vartheta_r (l_{ir}^{(k)} - l_{i0}^{(k)}).$$

En désignant, pour abréger,

$$x_i - m l_{i0}^{(k)} = t_i, \quad l_{ir}^{(k)} - l_{i0}^{(k)} = p_{ir}, \qquad (r=1, 2, \ldots \nu)$$

et

$$m\vartheta_r = \tau_r , \qquad (r=1,2,\dots\nu)$$

on aura

$$(2.) \qquad t_i = \sum_{r=1}^{\nu} \tau_r p_{ir} \quad \text{où} \quad \sum_{r=1}^{\nu} \tau_r < m \text{ et } \tau_r > 0. \qquad (r=1,2,\dots\nu)$$

Désignons par $\omega_k^{(\nu)}$ le plus grand diviseur commun des déterminants de l'ordre ν^2 qu'on peut former de ν systèmes

$$(p_{i1}),\ (p_{i2}),\dots(p_{i\nu})$$

et supposons que les formes (2.) représentent les nombres entiers $t_1, t_2, \dots t_n$, à condition que les nombres $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_\nu$ appartiennent à un des $\omega_k^{(\nu)}$ ensembles

$$(3.) \qquad \tau_r = \xi_{rh} + y_r \text{ où } r = 1, 2, \dots \nu,\ h = 1, 2, \dots \omega_k^{(\nu)},$$

$y_1, y_2, \dots y_\nu$ étant des nombres entiers arbitraires.

On peut supposer que

$$0 < \xi_{rh} \leqq 1. \qquad (r=1,2,\dots\nu,\ h=1,2,\dots\omega_k^{(\nu)})$$

En substituant les expressions de τ_r $(r = 1,2,\dots\nu)$ tirées des égalités (3.) dans les inégalités (2.), on obtient

$$(4.) \qquad \xi_{rh} + y_r > 0, \quad (r=1,2,\dots\nu) \qquad \sum_{r=1}^{\nu} (\xi_{rh} + y_r) < m.$$

Désignons

$$(5.) \qquad \sum_{r=1}^{\nu} \xi_{rh} = a_h + \xi_h$$

où le nombre entier a_h est déterminé d'après les conditions

$$(6.) \qquad 0 \leqq \xi_p < 1.$$

Les inégalités (4.) peuvent être remplacées par les suivantes:

$$y_r \geqq 0, \quad (r=1,2\ldots\nu) \qquad \text{et} \quad \sum_{r=1}^{\nu} y_r \leqq m-a_h-1.$$

Le nombre des systèmes $(y_1, y_2, \ldots y_\nu)$ de nombres entiers $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ vérifiant ces inégalités est égal à

$$\frac{(m-a_h)(m+1-a_h)\ldots(m+\nu-1-a_h)}{1\cdot 2\cdots\nu}.$$

En remplaçant par $a_{hk}^{(\nu)}$ le nombre a_h correspondant aux différents ensembles (3.), on obtient la formule

$$(7.) \qquad m_k^{(\nu)} = \sum_{h=1}^{\omega_k^{(\nu)}} \frac{(m-a_{hk}^{(\nu)})(m+1-a_{hk}^{(\nu)})\ldots(m+\nu-1-a_{hk}^{(\nu)})}{1\cdot 2\cdots\nu}.$$

En substituant dans l'égalité (1.), on trouve

$$(8.) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{k=1}^{\sigma_\nu} \sum_{h=1}^{\omega_k^{(\nu)}} \frac{(m-a_{hk}^{(\nu)})\ldots(m+\nu-1-a_{hk}^{(\nu)})}{1\cdot 2\cdots\nu} = m^n.$$

La formule obtenue subsiste, quelle que soit la valeur entière positive de m. On en conclut que cette formule présente une identité.

65. En comparant les coefficients de m^n dans la formule (8.), on trouve

$$\sum_{k=1}^{\sigma_n} \omega_k^{(n)} = n!.$$

Il s'ensuit que

$$\sigma_n \leqq n!.$$

Introduisons dans nos recherches les différences finies de différents ordres en les définissant par la formule

$$\Delta^{(\mu)} f(m) = \sum_{k=0}^{\mu} (-1)^{\mu-k} \frac{\mu!}{k!(\mu-k)!} f(m+\mu).$$

La formule (8.) donne

$$\sum_{\nu=\mu}^{n} \sum_{k=1}^{\sigma_\nu} \sum_{h=1}^{\omega_k^{(\nu)}} \frac{(m+\mu-a_{hk}^{(\nu)}) \cdots (m+\nu-1-a_{hk}^{(\nu)})}{1 \cdot 2 \cdots (\nu-\mu)} = \Delta^{(\mu)}(m^n). \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots n)$$

En faisant $m = 1$ dans cette formule et en observant que

$$\frac{(\mu+1-a_{hk}^{(\nu)}) \cdots (\nu-a_{hk}^{(\nu)})}{1 \cdot 2 \cdots (\nu-\mu)} \geqq 0$$

puisque, à cause de (5.) et (6.)

$$a_{hk}^{(\nu)} \leqq \nu,$$

on trouve

$$(9.) \qquad \sum_{k=1}^{\sigma_\mu} \omega_k^{(\mu)} \leqq \Delta^{(\mu)}(m^n)_{m=1}. \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots n)$$

Il s'ensuit que

$$\sigma_\mu \leqq \Delta^{(\mu)}(m^n)_{m=1}. \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots n)$$

Nous avons vu au n° 60 que

$$(10.) \qquad S_\nu = (n+1-\nu)\,\sigma_{n-\nu}, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$$

donc

$$S_\nu \leqq (n+1-\nu)\,\Delta^{(n-\nu)}(m^n)_{m=1}. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$$

66. Examinons les conditions qui doivent être remplies pour que les symboles S_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$ s'expriment par la formule

$$(11.) \qquad S_\nu = (n+1-\nu)\,\Delta^{(n-\nu)}(m^n)_{m=1}. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$$

En vertu des inégalités (9.), il est nécessaire que

(12.) $$\omega_k^{(\mu)} = 1\,. \qquad (k=1,2,\ldots\sigma_\mu;\ \mu=0,1,2,\ldots n)$$

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les formules (11.) subsistent. En effet, dans le cas $\omega_k^{(\nu)} = 1$, la formule (7.) devient

$$m_k^{(\nu)} = \frac{(m-\nu)(m+1-\nu)\cdots(m-1)}{1\cdot 2\cdots\nu},$$

et l'égalité (8.) prend la forme

$$\sum_{\nu=0}^{n} \sigma_\nu \frac{(m-\nu)\cdots(m-1)}{1\cdot 2\cdots\nu} = m^n.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{\nu=\mu}^{n} \sigma_\nu \frac{(m+\mu-\nu)\cdots(m-1)}{1\cdot 2\cdots(\nu-\mu)} = \Delta^{(\mu)}(m^n),$$

et en faisant $m=1$, on obtient

$$\sigma_\mu = \Delta^{(\mu)}(m^n)_{m=1}\,. \qquad (\mu=0,1,2,\ldots n)$$

Il en résulte, à cause de (10.), la formule (11.).

Observons que les conditions (12.) se ramènent à une seule condition

$$\sigma_n = n\,!\,.$$

Nous allons voir qu'il existe des paralléloèdres primitifs qui satisfont à cette condition.

67. *Théorème. Les faces à* 1, 2, 3 et 4 *dimensions des simplexes de l'ensemble* (*L*) *jouissent de la propriété que*

$$\omega_k^{(\nu)} = 1\,. \qquad (k=1,2,\ldots\sigma_\nu;\ \nu=1,2,3,4)$$

La démonstration du théorème énoncé ne présente pas de difficultés.

Corollaire. Le nombre des faces à différentes dimensions des paralléloèdres primitifs dans l'espace à 2, 3 et 4 *dimensions s'exprime par la formule* (11.).

1. En faisant dans la formule (11.) $n=2$, on obtient

$$S_0=6 \text{ et } S_1=6.$$

2. En faisant dans la formule (11.) $n=3$, on obtient

$$S_0=24,\ S_1=36,\ S_2=14.$$

3. En faisant dans la formule (11.) $n=4$, on obtient

$$S_0=120,\ S_1=240,\ S_2=150,\ S_3=30.$$

En étudiant les paralléloèdres primitifs dans l'espace à 5 dimensions, j'ai rencontré des paralléloèdres dont le nombre de faces ne s'exprime pas par la formule (11.).

68. Nous avons vu que, dans le cas $\omega_k^{(\nu)}=1$, on a

$$a_{kh}^{(\nu)}=\nu.$$

Il est aisé de démontrer que, dans le cas $\omega_k^{(\nu)}>1$, on aura cette égalité pour un seul ensemble (3.) qui est composé de nombres entiers; pour tous les ensembles qui restent, on aura les inégalités

$$(13.) \qquad 2\leqq a_{hk}^{(\nu)}\leqq \nu-2. \qquad (\nu\geqq 5)$$

Faisons dans la formule (8.) $m=0$. En observant que

$$\frac{(-a_{hk}^{(\nu)})\ (1-a_{hk}^{(\nu)})\cdots(\nu-1-a_{hk}^{(\nu)})}{1\cdot 2\cdots\nu}=0$$

tant que $a_{kh}^{(\nu)}\neq\nu$, on trouve

$$\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\sigma_{\nu}=0.$$

En faisant dans la formule (8.) $m=-1$, on obtient, à cause de (13.),

$$\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}(\nu+1)\,\sigma_{\nu}=(-1)^{n}.$$

En substituant dans cette formule l'expression de σ_ν tirée de la formule (10.), on aura

$$(14.)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}S_{\nu}=1.$$

Observons que l'égalité obtenue exprime une propriété des faces à différentes dimensions des parallélоèdres primitifs qui est commune à tous les polyèdres convexes de l'espace à n dimensions*). En faisant dans la formule (14.) $n=3$, on aura

$$S_0-S_1+S_2-S_3=1,$$

et comme $S_3=1$, il vient

$$S_0+S_2=2+S_1.$$

C'est la formule bien connue d'*Euler***).

Régulateurs et caractéristiques des arêtes des parallélоèdres primitifs.

69. Examinons l'ensemble (R) des parallélоèdres primitifs appartenant à un type de parallélоèdres caractérisé par un ensemble (L) de simplexes.

Soit (α_i) un sommet des parallélоèdres de l'ensemble (R) déterminé par les équations

$$(1.)\qquad \Sigma\Sigma a_{ij}\,l_{ik}\,l_{jk}+2\,\Sigma\alpha_i\,l_{ik}=A. \qquad (k=1,2,\ldots n)$$

---

*) Voyez: *Poincaré*, Sur la généralisation d'un théorème d'*Euler* relatif aux polyèdres. (Comptes Rendus des séances de l'Académie de Paris, t. 117, p. 144.)

**) *Euler*, Elementa doctrinae solidorum. (Novi Comment. Petrop. 1758.)

Le simplexe L corrélatif au sommet (α_i) est caractérisé par les systèmes

$$(l_{i0}), (l_{i1}), \ldots (l_{in}). \tag{2.}$$

Désignons par (α_{ik}) $(k = 0, 1, 2, \ldots n)$ les sommets adjacents au sommet (α_i) (n° 18). Le simplexe L_k $(k = 0, 1, 2, \ldots n)$ corrélatif au sommet (α_{ik}) sera caractérisé par les systèmes qu'on obtient des systèmes (2.) en remplaçant le sommet (l_{ik}) du simplexe L par un sommet correspondant (l'_{ik}) du simplexe L_k. Les deux simplexes L et L_k sont contigus par une face à $n-1$ dimensions P_k $(k = 0, 1, 2, \ldots n)$ qui est caractérisée par les systèmes

$$(l_{ih}). \qquad (h=0, 1, 2, \ldots n;\ h \neq k)$$

La face P_k des simplexes L et L_k est corrélative à une arête $[\alpha_i, \alpha_{ik}]$ des paralléloèdres de l'ensemble (R).

Désignons par

$$\Sigma p_{ik} x_i = \delta_k, \qquad (k=0, 1, 2, \ldots n)$$

l'équation de la face P_k. Comme on a

$$\Sigma p_{ik} l_{ik} = \delta_k, \qquad (h=0, 1, 2, \ldots n;\ h \neq k)$$

il vient

$$\Sigma p_{ik} (l_{ik} - l_{ir}) = 0. \tag{3.}$$ $(h=0, 1, 2, \ldots n;\ r=0, 1, 2, \ldots n;\ h \neq k, r \neq k)$

Les égalités obtenues définissent les nombres $p_{1k}, p_{2k}, \ldots p_{nk}$ à un facteur commun près. En supposant que $p_{1k}, p_{2k}, \ldots p_{nk}$ soient des nombres entiers n'ayant pas de diviseur commun, on déterminera par les égalités (3.) deux systèmes (p_{ik}) et $(-p_{ik})$. On appellera caractéristique de l'arête $[\alpha, \alpha_{ik}]$ ou de la face corrélative P_k un des deux systèmes $\pm (p_{ik})$ également.

En observant que

$$\Sigma p_{ik} l_{ik} \neq \delta_k,$$

on ajoutera, pour plus de précision, une condition supplémentaire

$$\Sigma p_{ik} l_{ik} > \delta_k.$$

Définition I. *On appellera caractéristique de la face P_k par rapport au simplexe L le système (p_{ik}) qui est bien défini par les conditions*

$$\Sigma p_{ik} l_{ik} > \delta_k, \quad \Sigma p_{ik} l_{ih} = \delta_k. \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots n, h \neq k) \tag{4.}$$

Observons que la caractéristique de la face P_k par rapport au simplexe L_k sera le système $(-p_{ik})$. En effet, on aura

$$\Sigma p_{ik} l'_{ik} \neq \delta_k.$$

Admettons que

$$\Sigma p_{ik} l'_{ik} > \delta_k.$$

Dans ce cas les deux simplexes L et L_k seraient situés d'un même côté de la face P_k, et on pourrait trouver un point intérieur au simplexe L qui serait intérieur au simplexe L_k aussi, ce qui est contre le théorème I démontré au n° 61. Il est donc nécessaire que

$$\Sigma p_{ik} l'_{ik} < \delta_k,$$

et le système $(-p_{ik})$ présente la caractéristique de la face P_k par rapport au simplexe L_k.

70. On déterminera le sommet (α_{ik}) $(k = 0, 1, 2, \ldots n)$ corrélatif au simplexe L_k par les équations

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_{ih} l_{jh} + 2\Sigma \alpha_{ik} l_{ih} = A_k \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots n; h \neq k) \tag{5.}$$

et

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l'_{ik} l'_{jk} + 2\Sigma \alpha_{ik} l'_{ik} = A_k. \tag{6.}$$

Des égalités (1.) et (5.), on tire

$$2\Sigma(\alpha_{ik} - \alpha_i) l_{ih} = A_k - A. \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots n; h \neq k) \tag{7.}$$

Il en résulte qu'à cause de (3.), on aura

$$(8.) \qquad \alpha_{ik} - \alpha_i = p_{ik}\varrho_k. \qquad (i = 1,2,\ldots n;\ k = 0,1,2,\ldots n)$$

En vertu de la supposition faite, les sommets (α_i) et (α_{ik}) $(k = 0,1,2,\ldots n)$ des parallèloèdres primitifs de l'ensemble (R) sont simples.

Il s'ensuit que

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l'_{ik} l'_{jk} + 2\Sigma\alpha_i l'_{ik} > A$$

et

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l_{ik} l_{ik} + 2\Sigma\alpha_{ik} l_{ik} > A_k.$$

En vertu de (1.) et (6.), on obtient

$$2\Sigma(\alpha_{ik} - \alpha_i) l_{ik} > A_k - A \quad \text{et} \quad 2\Sigma(\alpha_{ik} - \alpha_i) l'_{ik} < A_k - A$$

et, à cause de (8.), il vient

$$(9.) \qquad 2\varrho_k \Sigma p_{ik} l_{ik} > A_k - A \quad \text{et} \quad 2\varrho_k \Sigma p_{ik} l'_{ik} < A_k - A.$$

Comme en vertu de (7.) et (8.), on a

$$(10.) \qquad 2\varrho_k \Sigma p_{ik} l_{ih} = A_k - A, \qquad (h = 0,1,2,\ldots n;\ h \neq k)$$

les inégalités (9.) peuvent s'écrire

$$(11.) \qquad 2\varrho_k \Sigma p_{ik}(l_{ik} - l_{ih}) > 0,\ 2\varrho_k \Sigma p_{ik}(l'_{ik} - l_{ih}) < 0. \qquad (h = 0,1,2,\ldots n;\ h \neq k)$$

En observant qu'à cause de (4.)

$$(12.) \qquad \Sigma p_{ik}(l_i - l_{ih}) > 0, \qquad (h = 0,1,2,\ldots n;\ h \neq k)$$

on trouve

$$(13.) \qquad \varrho_k > 0, \qquad (k = 0,1,2,\ldots n)$$

et la seconde inégalité (11.) donne

$$(14.) \qquad \Sigma p_{ik}(l'_{ik}-l_{ih})<0, \qquad (h=0,1,2,\dots n;\ h\neq k)$$

ou autrement, à cause de (4.),

$$(15.) \qquad \Sigma p_{ik} l'_{ik}<\delta_k, \qquad (k=0,1,2,\dots n)$$

ce que nous avons démontré d'une autre manière.

71. En substituant dans (6.) l'expression de α_{ik} tirée de l'égalité (8.), on obtient

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l'_{ik} l'_{jk} + 2\Sigma\alpha_i l'_{ik} + 2\varrho_k \Sigma p_{ik} l'_{ik} = A_k .$$

On présentera cette égalité, à cause de (1.), sous la forme

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l'_{ik} l'_{jk} + 2\Sigma\alpha_i l'_{0k} - \Sigma\Sigma a_{ij} l_{ik} l_{jk} - 2\Sigma\alpha_i l_{ik} = A_k - A - 2\varrho_k \Sigma p_{ik} l'_{ik},$$

et enfin, en vertu de (10.),

$$(16.)\ 2\varrho_k \Sigma p_{ik}(l_{ih}-l'_{ik}) = \Sigma\Sigma a_{ij} l'_{ik} l'_{jk} + 2\Sigma\alpha_i l'_{ik} - \Sigma\Sigma\alpha_{ij} l_{ik} l_{jk} - 2\Sigma\alpha_i l_{ik}$$
$$\text{où } h=0,1,2,\dots n,\ h\neq k,\ k=0,1,2,\dots n.$$

Définition II. *On appellera régulateur de l'arête* $[\alpha_i, \alpha_{ik}]$ *ou de la face corrélative* P_k *le paramètre positif* ϱ_k *défini par les formules* (8.) *et* (16.).

Observons qu'en vertu des égalités (3.) et (8.) les arêtes congruentes et les faces corrélatives congruentes possèdent le même régulateur et la même caractéristique.

On peut déterminer le régulateur ϱ_k par d'autres formules.

Posons

$$(17.) \qquad l'_{ik} = \sum_{r=0}^{n} \vartheta_r^{(k)} l_{ir} \text{ où } \sum_{r=0}^{n} \vartheta_r^{(k)} = 1 . \qquad (k=0,1,2,\dots n)$$

En vertu des égalités (1.) et (17.), on obtient

$$\Sigma\Sigma a_{ij} l'_{ik} l'_{jk} + 2\Sigma \alpha_i l'_{ik} - \Sigma\Sigma a_{ij} l_{ik} l_{jk} - 2\Sigma \alpha_i l_{ik}$$
$$= \Sigma\Sigma a_{ij} l'_{ik} l'_{jk} - \sum_{r=0}^{n} \vartheta_r^{(k)} \Sigma\Sigma a_{ij} l_{ir} l_{jr}.$$

En substituant dans la formule (16.), on trouve

$$(18.) \qquad 2\varrho_k \Sigma p_{ik} (l_{ih} - l'_{ik}) = \Sigma\Sigma a_{ij} l'_{ik} l'_{jk} - \sum_{r=0}^{n} \vartheta_r^{(k)} \Sigma\Sigma a_{ij} l_{ir} l_{jr}$$

où $h = 0, 1, 2, \ldots n$; $h \neq k$; $k = 0, 1, 2, \ldots n$.

La formule obtenue fait voir une propriété importante du régulateur ϱ_k: *le régulateur ϱ_k s'exprime par une fonction linéaire des coefficients de la forme quadratique* $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$. En posant

$$(19.) \qquad \varrho_k = \Sigma\Sigma p_{ij}^{(k)} a_{ij},$$

on aura les coefficients rationnels $p_{ij}^{(k)} = p_{ji}^{(k)}$, $i = 1, 2, \ldots n$, $j = 1, 2, \ldots n$.

72. En vertu de la formule (19.), le régulateur ϱ_k sera parfaitement déterminé, si l'on connaît les coefficients correspondants $p_{ij}^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots n;$ $j = 1, 2, \ldots n)$.

Comme les coefficients a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots n;$ $j = 1, 2, \ldots n)$ de la forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ ne jouent aucun rôle dans la détermination des coefficients $p_{ij}^{(k)}$ $(i = 1, 2, \ldots n; j = 1, 2, \ldots n)$ qui ne dépendent que des simplexes L et L_k, on peut remplacer dans les formules précédentes les coefficients a_{ij} par les coefficients $x_i x_j$ $(i = 1, 2, \ldots n;$ $j = 1, 2, \ldots n)$.

En introduisant les fonctions linéaires, comme nous l'avons fait au n° 58,

$$u_r = \Sigma l_{ir} x_i, \quad v_r = \Sigma l'_{ir} x_i, \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots n)$$

désignons par

$$u_r^{(k)} \text{ et } v_r^{(k)} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots n)$$

les valeurs de ces fonctions qui correspondent aux valeurs des variables $x_1, x_2, \ldots x_n$

$$x_i = p_{ik}. \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n)$$

En vertu de (4.), on aura

$$u_h^{(k)} = \delta_k. \qquad (h=0,1,2,\dots n;\ h \neq k,\ u_k^{(k)} > \delta_k)$$

En vertu de (15.), on aura

$$v_k^{(k)} < \delta_k.$$

Observons que les nombres $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots \vartheta_n$ définis par les égalités (17.) seront déterminés par les égalités

$$v_k = \sum_{r=0}^{n} \vartheta_r^{(k)}\, u_r \quad \text{où} \quad \Sigma \vartheta_r^{(k)} = 1.$$

En remplaçant dans la formule (18.) les coefficients a_{ij} par les coefficients $x_i x_j$, $i=1,2,\dots n$, $j=1,2,\dots n$, on obtient

$$(20.) \qquad 2\varrho_k(\delta_k - v_k^{(k)}) = (v_k)^2 - \sum_{r=0}^{n} \vartheta_r^{(k)}\, (u_r)^2. \qquad (k=0,1,2,\dots n)$$

Pour revenir de la formule obtenue à la formule (19.), il suffit de remplacer dans l'égalité

$$\varrho_k = \Sigma\Sigma\, p_{ij}^{(k)}\, x_i x_j$$

les coefficients $x_i x_j$ par les coefficients a_{ij}, $i=1,2,\dots n$, $j=1,2,\dots n$.

Transformation fondamentale de la forme
$\Sigma\Sigma a_{ij}\, x_i\, x_j + 2\Sigma\alpha_i x_i - \Sigma\Sigma a_{ij}\, l_i\, l_j - 2\Sigma\alpha_i\, l_i.$

73. En conservant les notations précédentes, désignons

$$(1.) \qquad F_{(L)}(x_1, x_2, \dots x_n) = \Sigma\Sigma a_{ij}\, x_i\, x_j + 2\Sigma\alpha_i\, x_i - A$$

où on a posé

$$(2.) \qquad A = \Sigma\Sigma a_{ij}\, l_{ik}\, l_{jk} + 2\Sigma\alpha_i\, l_{ik}. \qquad (k=0,1,2,\dots n)$$

En introduisant les variables $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$ d'après les conditions

$$(3.) \qquad x_i = \sum_{r=0}^{n} \xi_r l_{ir} \quad \text{où} \quad \sum_{r=0}^{n} \xi_r = 1,$$

on présentera la fonction $F_{(L)}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ sous la forme suivante:

$$(4.) \qquad F_{(L)}(x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j - \sum_{r=0}^{n} \xi_r \Sigma\Sigma a_{ij} l_{ir} l_{jr}.$$

On en conclut que la fonction $F_{(L)}(x_1, x_2, \ldots x_n)$ est linéaire par rapport aux coefficients a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots n$, $j = 1, 2, \ldots n$ d'une forme quadratique arbitraire $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$.

En faisant dans la formule (1.) $x_i = l_{ik}$, on obtient, à cause de (2.),

$$F_{(L)}(l_{1k}, l_{2k}, \ldots l_{nk}) = 0. \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n)$$

Les égalités obtenues subsistent, quelles que soient les valeurs de a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots n$, $j = 1, 2, \ldots n$.

Désignons par L^0 un simplexe congruent au simplexe L et caractérisé par les sommets

$$(l_{i0} + l_i), \ (l_{i1} + l_i), \ldots (l_{in} + l_i),$$

$l_1, l_2, \ldots l_n$ étant des nombres entiers arbitraires.

En observant qu'à cause de (3.)

$$x_i + l_i = \sum_{r=0}^{n} \xi_r (l_{ir} + l_i) \quad \text{où} \quad \sum_{r=0}^{n} \xi_r = 1,$$

on aura une égalité

$$F_{(L^0)}(x_1 + l_1, x_2 + l_2, \ldots x_n + l_n) = \Sigma\Sigma a_{ij} (x_i + l_i), (x_j + l_j) - \sum_{r=0}^{n} \xi_r \Sigma\Sigma a_{ij} (l_{ir} + l_i) (l_{jr} + l_j)$$

et après les réductions, il vient

$$F_{(L^0)}(x_1+l_1, x_2+l_2, \ldots x_n+l_n) = \Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j - \sum_{r=0}^{n} \xi_r \Sigma\Sigma a_{ij} l_{ir} l_{jr},$$

donc, à cause de (4.) on aura

$$(5.) \qquad F_{(L^0)}(x_1+l_1, x_2+l_2, \ldots x_n+l_n) = F_{(L)}(x_1, x_2, \ldots x_n).$$

En vertu de la formule (18.) du n° 71, on déterminera le régulateur ϱ_k par la formule

$$(6.) \qquad 2\varrho_k \Sigma p_{ik}(l_{ih}-l'_{ik}) = F_{(L)}(l'_{1k}, l'_{2k}, \ldots l'_{nk}). \qquad (k=0, 1, 2, \ldots n)$$

74. Désignons

$$F_{(L_k)}(x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\Sigma a_{ik} x_i - A_k, \qquad (k=0, 1, 2, \ldots n)$$

L_k étant un simplexe contigu au simplexe L par la face P_k $(k=0, 1, 2, \ldots n)$.

En substituant dans cette égalité l'expression de a_{ik} tirée de la formule (8.) du n° 70, on obtient

$$F_{(L_k)}(x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\Sigma a_i x_i + 2\varrho_k \Sigma p_{ik} x_i - A_k$$

et, à cause de (1.), on aura

$$F_{(L_k)}(x_1, x_2, \ldots x_n) = F_{(L)}(x_1, x_2, \ldots x_n) + 2\varrho_k \Sigma p_{ik} x_i + A - A_k.$$

En substituant dans cette égalité l'expression de $A-A_k$ donnée par la formule (10.) du n° 70, on trouve

$$F_{(L_k)}(x_1, x_2, \ldots x_n) = F_{(L)}(x_1, x_2, \ldots x_n) + 2\varrho_r \Sigma p_{ik}(x_i - l_{ih}). \qquad (h \neq k)$$

Cette formule peut s'écrire

$$(*) \quad F_{(L)}(x_1, x_2, \ldots x_n) = F_{(L_k)}(x_1, x_2, \ldots x_n) + 2\varrho_k \Sigma p_{ik}(l_{ih} - x_i).$$
$$(h \neq k,\ k=0, 1, 2, \ldots n)$$

La formule obtenue (*) est susceptible d'applications nombreuses et importantes.

75. Supposons que $x_1, x_2, \ldots x_n$ soient des nombres entiers arbitraires et que le point (x_i) ne se trouve pas parmi les sommets

$$(l_{i0}), (l_{i1}), \ldots (l_{in}) \tag{7.}$$

du simplexe L. En posant

$$x_i = \sum_{r=0}^{n} \xi_r l_{ir} \text{ où } \sum_{r=0}^{n} \xi_r = 1, \tag{8.}$$

on aura en vertu du corollaire du théorème II du n° 62 parmi les nombres $\xi_0, \xi_1, \ldots \xi_n$ au moins un nombre négatif. Supposons pour fixer les idées que

$$\xi_k < 0. \tag{9.}$$

En observant qu' à cause de (3.) et de la formule (4.) du n° 69 on a

$$\Sigma p_{ik} (l_{ih} - x_i) = \xi_k \Sigma p_{ik} (l_{ih} - l_{ik})$$

et que

$$\Sigma p_{ik} (l_{ih} - l_{ik}) < 0, \qquad (h \neq k)$$

on obtient, à cause de (9.),

$$\Sigma p_{ik} (l_{ih} - x_i) > 0.$$

On en conclut que le coefficient du $2\varrho_k$ dans la formule (*), est un nombre entier et positif dans le cas considéré.

De la même manière, on examinera la fontion $F_{(L_k)} (x_1, x_2, \ldots x_n)$ et ainsi de suite.

76. Admettons qu'on ait examiné les simplexes

$$L, L', L'', \ldots L^{(m)} \tag{10.}$$

contigus successivement par les faces à $n-1$ dimensions dont les régulateurs présentent les fonctions

$$\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_m.$$

Supposons qu'en appliquant la formule (*) aux simplexes (10.) on ait obtenu les égalités

$$F_{(L)}(x_1, x_2, \dots x_n) = F_{(L')}(x_1, x_2, \dots x_n) + 2h_1\varrho_1 \quad \text{où } h_1 > 0,$$

$$F_{(L')}(x_1, x_2, \dots x_n) = F_{(L'')}(x_1, x_2, \dots x_n) + 2h_2\varrho_2 \quad \text{où } h_2 > 0,$$

$$\dots\dots\dots

$$F\,(_{L^{(m)}})\,(x_1, x_2, \ldots x_n) \geqq 0$$

et la formule (11.), dans le cas considéré, donne

$$F_{(L)}\,(x_1, x_2, \ldots x_n) \geqq 2 \sum_{k=1}^{m} h_k \varrho_k .$$

Comme les coefficients h_k $(k=1, 2, \ldots m)$ sont des nombres entiers positifs et les régulateurs ϱ_k $(k=1, 2, \ldots m)$ appartiennent à une série de régulateurs correspondant aux faces incongruentes des simplexes de l'ensemble (L), on en conclut que le nombre m ne peut être augmenté indéfiniment. Il en résulte que la série (10.) se terminera par un simplexe $L^{(m)}$ parmi les sommets duquel se trouve le point (x_i).

Il s'ensuit qu'on aura identiquement

$$F(_{L^{(m)}})\,(x_1, x_2, \ldots x_n) = 0,$$

et la formule (11.) devient

$$(12.) \qquad F_{(L)}\,(x_1, x_2, \ldots x_n) = 2 \sum_{h=1}^{m} h_k \varrho_k \quad \text{où} \quad h_k > 0. \qquad (k=1, 2, \ldots m)$$

Observons que la formule obtenue présente une identité qui subsiste, quelles que soient les valeurs des coefficients a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots n$, $j = 1, 2, \ldots n$, à condition que les régulateurs ϱ_k $(k = 1, 2, \ldots m)$ s'expriment par la formule (6.).

77. *Théorème fondamental.* *Supposons que les régulateurs* ϱ_k $(k=1, 2, \ldots \sigma)$ *correspondant aux différentes faces incongruentes à* $n-1$ *dimensions des simplexes appartenant à l'ensemble* (L) *soient déterminés par les égalités*

$$\varrho_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}^{(k)}\, a_{ij} . \qquad (k=1, 2, \ldots \sigma)$$

Pour qu'une forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ *définisse un ensemble* (R) *de paralléloèdres primitifs appartenant au type caractérisé par l'ensemble* (L) *de simplexes, il faut et il suffit que les inégalités*

$$\varrho_k = \Sigma\Sigma p_{ij}^{(k)}\, a_{ij} > 0, \qquad (k=1, 2, \ldots o)$$

aient lieu.

Nous avons vu au n° 70 que les inégalités

(13.) $$\varrho_k > 0, \qquad (k=1, 2, \ldots o)$$

présentent les conditions nécessaires. Supposons que les coefficients d'une forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij}\, x_i\, x_j$ vérifient les inégalités (13.). En vertu de la formule (12.), on aura l'inégalité

$$F_{(L)}(x_1, x_2, \ldots x_n) > 0$$

tant que le point (x_i) dont les éléments sont des nombres entiers ne se trouve pas parmi les sommets du simplexe L.

En vertu de la définition établie, le simplexe L est dans ce cas corrélatif à un sommet simplexe (α_i) des paralléloèdres correspondant à la forme quadratique examinée $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$.

Le simplexe L est choisi arbitrairement dans l'ensemble (L) des simplexes, donc tous les simplexes de l'ensemble (L) sont corrélatifs aux sommets simples des paralléloèdres correspondant à la forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$.

Je dis que ces paralléloèdres ne possèdent pas d'autres sommets, c'est ce qu'on vérifiera sans peine.

78. Observons que chaque forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ vérifiant les inégalités (13.) est positive. Pour le démontrer, examinons un simplexe L parmi les sommets duquel se trouve le point (0). On aura dans ce cas

$$F_{(L)}(x_1, x_2, \ldots x_n) = \Sigma\Sigma a_{ij} x_i\, x_j + 2\Sigma \alpha_i x_i,$$

et par suite

$$F_{(L)}(x_1, x_2, \ldots x_n) + F_{(L)}(-x_1, -x_2, \ldots -x_n) = 2\Sigma\Sigma a_{ij}\, x_i x_j.$$

Les deux points (x_i) et $(-x_i)$ ne peuvent être les sommets du simplexe L, le point (0) étant exclu. Il en résulte que

$$F_{(L)}(x_1, x_2, \dots x_n) + F_{(L)}(-x_1, -x_2, \dots -x_n) > 0,$$

donc

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j > 0,$$

quelles que soient les valeurs entières de $x_1, x_2, \dots x_n$, le système $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \dots x_n = 0$ étant exclu.

Définition des formes quadratiques à l'aide des régulateurs et des caractéristiques correspondantes.

79. Prenons une forme quadratique quelconque $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ à coefficients arbitraires. Choisissons n nombres $x_1, x_2, \dots x_n$ qui sont assujettis à la seule condition: *l'égalité*

$$h_1 x_1 + h_2 x_2 \cdots + h_n x_n = 0$$

est impossible tant que les nombres $h_1, h_2, \dots h_n$ sont entiers.

Examinons un vecteur g composé de points

$$\frac{l_i}{m} + u x_i \quad \text{où} \quad 0 \leqq u \leqq 1,$$

$l_1, l_2, \dots l_n$ étant des nombres entiers arbitraires et m étant un nombre entier positif quelconque.

Le vecteur g traversera un certain nombre de simplexes appartenant à l'ensemble (L). Désignons par

$$(1.) \qquad L_0, L_1 \dots L_s$$

les simplexes de l'ensemble (L) qui contiennent les parties différentes du vecteur g. En vertu de la supposition faite, les simplexes (1.) sont bien définis par le vecteur g et sont contigus successivement par les faces à $n-1$ dimensions. En effet, deux simplexes adjacents L_k et L_{k+1} de la serie (1.) possèdent un point commun (ξ_{ik}) appartenant au vecteur g, donc les simplexes L_k et L_{k+1} sont contigus par un face à un nombre quelconque ν de dimensions. Supposons que cette face soit caractérisée par les systèmes

(2.) $$(l_{i0}),\ (l_{i1}),\dots (l_{i\nu}).$$

Comme

$$\xi_{ik}=\frac{l_i}{m}+u_k x_i \quad \text{où} \quad 0<u_k<1,$$

on aura

(3.) $$\frac{l_i}{m}+u_k x_i=\sum_{r=0}^{\nu}\vartheta_r l_{ir} \quad \text{où} \quad \Sigma\vartheta_r=1 \text{ et } \vartheta_r>0. \qquad (r=0,1,2,\dots\nu)$$

En admettant que $\nu<n-1$, on déterminera à l'aide de ces égalités un système (h_i) de nombres entiers vérifiant l'équation

$$h_1 x_1+h_2 x_2+\cdots+h_n x_n=0,$$

ce qui est contre l'hypothèse, donc il est nécessaire que $\nu=n-1$ et que le point (ξ_{ik}) soit intérieur à une face à $n-1$ dimensions qui est commune aux simplexes L_k et L_{k+1}.

Supposons que $\nu=n-1$. En désignant par (p_{ik}) la caractéristique de la face P_k caractérisée par les systèmes (2.) par rapport au simplexe L_k, on aura, en vertu de la formule (4.) du n° 69,

$$\Sigma p_{ik}\, l_{ir}=\delta_k, \qquad (r=0,1,2,\dots n-1)$$

et les égalités (3.) donnent

$$\Sigma p_{ik}\left(\frac{l_i}{m}+u_k x_i\right)=\delta_k$$

et par suite

$$u_k \Sigma p_{ik}\, x_i=\delta_k-\Sigma p_{ik}\,\frac{l_i}{m}.$$

Comme $\Sigma p_{ik}\, x_i\neq 0$, en vertu de la supposition faite, l'égalité obtenue définit un point (ξ_{ik}) du vecteur g qui est intérieur à la face P_k. Il en résulte que le vecteur g ne possède pas d'autres points communs à la face P_k. En attribuant au paramètre u une variation δu négative suffisamment petite, on définira un point $\left(\frac{l_i}{m}+(u_k+\delta u)x_i\right)$ du vecteur g qui

est intérieur au simplexe L_k. En attribuant au paramètre u une variation $\delta u > 0$, on obtient un point $\left(\frac{l_i}{m} + (u_k + \delta u)x_i\right)$ qui est intérieur au simplexe L_{k+1}.

Comme dans ces cas on a

$$\Sigma p_{ik}\left(\frac{l_i}{m} + (u_k + \delta u)x_i\right) > \delta_k, \qquad (\delta u < 0)$$

et

$$\Sigma p_{ik}\left(\frac{l_i}{m} + (u_k + \delta u)x_i\right) < \delta_k, \qquad (\delta u > 0)$$

il vient

$$\Sigma p_{ik}\, x_i < 0. \tag{4.}$$

En désignant par ϱ_k le régulateur de la face P_k par rapport à la forme quadratique choisie $\Sigma\Sigma a_{ij}\, x_i k_j (k = 0, 1, 2, \ldots s-1)$, appliquons la formule (*) du n° 74 aux simplexes (1.). On aura les égalités

$$F_{(L_0)}\left(\frac{l_1}{m} + x_1, \ldots \frac{l_n}{m} + x_n\right) = F_{(L_1)}\left(\frac{l_1}{m} + x_1, \ldots \frac{l_n}{m} + x_n\right) + 2\varrho_0 \Sigma p_{i0}\left(l_{ih_0} - \frac{l_i}{m} - x_i\right),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F_{(L_{s-1})}\left(\frac{l_1}{m} + x_1, \ldots \frac{l_n}{m} + x_n\right) = F_{(L_s)}\left(\frac{l_1}{m} + x_1, \ldots \frac{l_n}{m} + x_n\right) + 2\varrho_{s-1} \Sigma p_{i,s-1}\left(l_{ih_{s-1}} - \frac{l_i}{m} - x_i\right).$$

Il s'ensuit que

$$F_{(L_0)}\left(\frac{l_1}{m} + x_1, \ldots \frac{l_n}{m} + x_n\right) = 2 \sum_{k=0}^{s-1} \varrho_k \sum_{i=1}^{n} p_{ik}\left(l_{ih_k} - \frac{l_i}{m} - x_i\right) + F_{(L_s)}\left(\frac{l_1}{m} + x_1, \ldots \frac{l_n}{m} + x_n\right). \tag{5.}$$

Jusqu'à présent, les nombres entiers $l_1, l_2, \ldots l_n$ étaient arbitraires. Supposons que les nombres entiers $l_1, l_2, \ldots l_n$ satisfassent aux conditions

$$0 \leqq l_i < m. \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{6.}$$

Désignons par K l'ensemble des points incongruents $\left(\frac{l_i}{m}\right)$ vérifiant ces inegalités.

Le nombre des points appartenant à l'ensemble K est égal à m^n.

Appliquons la formule (5.) à tous les points de l'ensemble K et faisons la somme des égalités obtenues. On aura une formule

$$(7.)\qquad \begin{aligned} \Sigma F_{(L_0)}\left(\frac{l_1}{m}+x_1, \ldots \frac{l_n}{m}+x_n\right) &= 2\,\Sigma \varrho_k \Sigma p_{ik}\left(l_{ih_k}-\frac{l_i}{m}-x_i\right) \\ &\quad + \Sigma F_{(L_s)}\left(\frac{l_1}{m}+x_1, \ldots \frac{l_n}{m}+x_n\right). \end{aligned}$$

Toutes les sommes qui se trouvent dans cette formule peuvent être déterminées avec une certaine approximation.

80. Supposons que le simplexe L_0 soit caractérisé par les systèmes

$$(l_{i0}),\ (l_{i1}), \ldots (l_{in}).$$

En vertu de la supposition faite, le point $\left(\frac{l_i}{m}\right)$ appartient au simplexe L_0. Comme il n'existe qu'un nombre fini de simplexes de l'ensemble (L) auxquels appartiennent les points $\left(\frac{l_i}{m}\right)$ vérifiant les inégalités (6.), on en conclut qu'on peut déterminer un paramètre positif λ, de manière que les inégalités

$$(8.)\qquad |l_{ik}| \leqq \lambda \qquad (i=1, 2, \cdots n;\ k=0, 1, 2, \ldots n)$$

aient lieu.

Dans ce cas, la valeur correspondante de la fonction

$$F_{(L_0)}\left(\frac{l_1}{m}+x_1, \frac{l_2}{m}+x_2, \ldots \frac{l_n}{m}+x_n\right)$$

peut être présentée sous la forme

$$F_{(L_0)}\left(\frac{l_1}{m}+x_1, \ldots \frac{l_n}{m}+x_n\right) = \Sigma\Sigma a_{ij}\, x_i x_j + \varepsilon_0 + \Sigma \varepsilon_i x_i$$

où les coefficients $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ ne surpassent pas en valeur numérique une limite fixe ε qui ne dépend que des coefficients de la forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ et du choix de l'ensemble (L) de simplexes.

Examinons la fonction $F_{(L_s)}\left(\frac{l_1}{m} + x_1, \ldots \frac{l_n}{m} + x_n\right)$. D'après la supposition faite, le point $\left(\frac{l_i}{m} + x_i\right)$ appartient au simplexe L_s. Déterminons les nombres entiers $t_1, t_2, \ldots t_n$ d'après les conditions

$$(9.) \qquad 0 \leqq \frac{l_i}{m} + x_i + t_i < 1, \qquad (i=1, 2 \ldots n)$$

et désignons par L'_s le simplexe congruent au simplexe L_s qu'on obtient par une translation du simplexe L_s le long du vecteur $[t_i]$.

En vertu de la formule (5.) du n° 73, on aura

$$(10.) \quad F_{(L_s)}\left(\frac{l_1}{m} + x_1, \ldots \frac{l_n}{m} + x_n\right) = F_{(L'_s)}\left(\frac{l_1}{m} + x_1 + t_1, \ldots \frac{l_n}{m} + x_n + t_n\right).$$

En désignant par

$$(l'_{i0}), \ldots (l'_{in})$$

les sommets du simplexe L'_s, on aura, en vertu de (9.), les inégalités (8.):

$$|l'_{ik}| \leqq \lambda. \qquad (i=1, 2, \ldots n; k=0, 1, 2, \ldots n)$$

Il s'ensuit que la valeur numérique de la fonction

$$F_{(L'_s)}\left(\frac{l_1}{m} + x_1 + t_1, \ldots \frac{l_n}{m} + x_n + t_n\right),$$

à cause de (8.) et (9.), ne surpasse pas une limite fixe φ qui ne dépend que des coefficients de la forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ et du choix de l'ensemble (L) de simplexes. En vertu de (10.), on peut poser

$$F_{(L_s)}\left(\frac{l_1}{m} + x_1, \ldots \frac{l_n}{m} + x_n\right) = \varphi_0 \text{ où } |\varphi_0| \leqq \varphi.$$

En substituant dans la formule (7.) les résultats obtenus, on la présentera sous la forme suivante:

$$(11.) \qquad m_n\left(\Sigma\Sigma\, a_{ij}\, x_i\, x_j + \varepsilon_0 + \Sigma\, \varepsilon_i x_i\right) = 2\,\Sigma\, \varrho_k \sum_{i=1}^{n} p_{ik}\left(l_{ih_k} - \frac{l_i}{m} - x_i\right).$$

Dans cette formule, les coefficients $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n$ ne surpassent pas en valeur numérique une limite fixe qui ne dépend pas des nombres $x_1, x_2, \ldots x_n$.

81. Déterminons les coefficients de $2\varrho_k$ dans la formule obtenue.

A cet effet, choisissons une face quelconque P à $n-1$ dimensions des simplexes de l'ensemble (L). Supposons que la face P soit caractérisée par les systèmes

$$(0), (l_{i1}), \ldots (l_{i,n-1}).$$

Désignons par ϱ le régulateur et par $\pm(p_i)$ la caractéristique de la face P par rapport à la forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$. On supposera, en vertu de (4.), que

$$(12.) \qquad \Sigma p_i x_i < 0.$$

Supposons que le vecteur g composé de points

$$\frac{l_i}{m} + u\, x_i \text{ où } 0 \leqq u \leqq 1$$

et correspondant à un point $\left(\frac{l_i}{m}\right)$ appartenant à l'ensemble K possède un point qui est intérieur à une face P' congruente à la face P.

En supposant que la face P' soit caractérisée par les systèmes

$$(g_i),\ (l_{i1} + g_i), \ldots (l_{i,n-1} + g_i),$$

on aura, en vertu de la supposition faite,

$$(13.) \quad \frac{l_i}{m} + u\, x_i = \sum_{k=0}^{n-1} \vartheta_k (g_i + l_{ik}) \text{ où } \sum_{k=0}^{n-1} \vartheta_k = 1 \text{ et } \vartheta_k > 0. \qquad (k=0,1,2,\ldots n-1)$$

La valeur correspondante du coefficient de 2ϱ dans la formule (11.) s'exprime par la somme

$$(14.) \qquad \Sigma \sum_{i=1}^{n} p_i \left(l_{ih} - \frac{l_i}{m} - x_i \right)$$

qui s'étend à toutes les faces P' congruentes à la face P vérifiant les égalités (13.), à condition que les points $\left(\frac{l_i}{m}\right)$ appartiennent à l'ensemble K.

Désignons, pour abréger,

$$(15.) \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = -\Delta .$$

On aura, à cause de (12.),

$$\Delta > 0 .$$

Comme le système (l_{ih}) dans la somme (14.) désigne un sommet quelconque de la face P', on peut poser

$$l_{ih} = g_i ,$$

et les égalités (13.) et (15.) donnent

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \left(g_i - \frac{l_i}{m} - x_i \right) = (1-u)\,\Delta .$$

Donc, la recherche du coefficient de 2ϱ dans la formule (11.) se ramène à l'évaluation de la somme

$$(16.) \qquad \Sigma (1-u)\,\Delta \text{ où } 0 < u < 1 .$$

82. Désignons, pour abréger,

$$(17.) \qquad -mg_i + l_i = h_i .$$

Le paramètre u vérifiant les égalités (13.) s'exprime par la formule

$$(18.) \qquad u = \frac{1}{m\Delta} \Sigma p_i h_i,$$

et comme $0 < u < 1$, il vient

$$0 < \Sigma p_i h_i < m\Delta.$$

En désignant par τ un nombre entier vérifiant les inégalités

$$(19.) \qquad 0 < \tau < m\Delta,$$

posons

$$(20.) \qquad \Sigma p_i h_i = \tau.$$

En vertu de (18.), la valeur correspondante du paramètre u sera

$$u = \frac{\tau}{m\Delta}.$$

Substituons l'expression trouvée du paramètre u dans les égalités (13.), il viendra, à cause de (17.),

$$(21.) \qquad \frac{\tau}{\Delta} x_i + h_i = m \sum_{k=1}^{n-1} \vartheta_k l_{ik} \quad \text{où} \quad \sum_{k=1}^{n-1} \vartheta_k < 1 \text{ et } \vartheta_k > 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

Cela posé, observons qu'on peut attribuer au nombre τ une valeur arbitraire vérifiant les inégalités (19.) Pour que des valeurs pareilles de τ existent, il est nécessaire que

$$m\Delta > 1.$$

Supposons que le nombre entier positif m satisfasse à cette condition. Dans ce cas, la recherche de la somme (16.) se ramène à la détermination d'une somme

$$(22.) \qquad \Sigma(1-u)\Delta = \sum_{\tau>0}^{\tau<m\Delta} m_\tau\left(\Delta-\frac{\tau}{m}\right)$$

où m_τ désigne le nombre des systèmes (h_i) de nombres entiers $h_1, h_2, \ldots h_n$ vérifiant les égalités (20.) et (21.).

83. Il est aisé de déterminer le nombre m_τ.

Désignons par (h_i^0) un système de nombres entiers vérifiant l'égalité

$$(23.) \qquad \Sigma p_i h_i^0 = 1.$$

Comme, en vertu de la supposition faite, les nombres entiers $p_1, p_2, \ldots p_n$ n'ont pas de diviseur commun, les systèmes de nombres entiers vérifiant cette égalité existent toujours.

On déterminera tous les systèmes (h_i) de nombres entiers vérifiant l'égalité (20.) à l'aide des formules

$$(24.) \qquad h_i = \tau h_i^0 + \sum_{k=1}^{n-1} \tau_k l_{ik}$$

où les nombres rationnels $\tau_1, \tau_2, \ldots \tau_{n-1}$ appartiennent à certains ensembles

$$(25.) \qquad \tau_k = \xi_{kr} + y_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1;\ r = 1, 2, \ldots \omega)$$

ω étant le plus grand diviseur commun de n déterminants de l'ordre $(n-1)^2$ qu'on peut former de $n-1$ systèmes

$$(l_{i1}),\ (l_{i2}), \ldots (l_{i,n-1}).$$

En substituant les expressions de $h_1, h_2, \ldots h_n$ tirées des égalités (24.) dans les égalités (21.), on obtient

$$(26.) \qquad \frac{\tau}{\Delta} x_i + \tau h_i^0 = \sum_{k=1}^{n-1} (m\vartheta_k - \tau_k) l_{ik}.$$

Observons que la valeur numérique du déterminant de n systèmes

$$(x_i),\ (l_{i1}), \ldots (l_{i,n-1})$$

s'exprime par la formule

$$\pm \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ l_{11} & l_{21} & \ldots & l_{n1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ l_{1,n-1} & l_{2,n-1} & \ldots & l_{n,n-1} \end{vmatrix} = -\Sigma x_i p_i \omega = \omega \Delta .$$

Désignons par $\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, \ldots \lambda_{nk}$, $(k = 1, 2, \ldots n-1)$ les déterminants mineurs qui sont définis par les égalités

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{ik} l_{ik} = \omega \Delta , \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

$$\Sigma \lambda_{ik} x_i = 0 , \quad \Sigma \lambda_{ik} l_{ir} = 0 . \qquad (r = 1, 2, \ldots n-1;\ r \neq k)$$

Les égalités (26.) donnent

$$\tau \Sigma \lambda_{ik} h_i^0 = \omega \Delta (m \vartheta_k - \tau_k) , \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

et il en résulte que

$$m \vartheta_k = \tau_k + \frac{\tau}{\omega \Delta} \Sigma \lambda_{ik} h_i^0 . \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

En vertu de (21.), on obtient les inégalités

$$\tau_k + \frac{\tau}{\omega \Delta} \Sigma \lambda_{ik} h_i^0 > 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\tau_k + \frac{\tau}{\omega \Delta} \Sigma \lambda_{ik} h_i^0 \right) < m.$$

Ayant égard aux ensembles (25.), on trouve

$$(27.) \qquad \begin{cases} y_k + \xi_{kr} + \dfrac{\tau}{\omega \Delta} \Sigma \lambda_{ik} h_i^0 > 0, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(y_k + \xi_{kr} + \frac{\tau}{\omega \Delta} \Sigma \lambda_{ik} h_i^0 \right) < m. \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

Posons

$$y_k + \xi_{kr} + \frac{\tau}{\omega \Delta} \Sigma \lambda_{ik} h_i^0 = y'_k + \eta_k \text{ où } 0 < \eta_k \leqq 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

et

$$(28.) \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \eta_k = a_r^{(\tau)} + \eta \text{ où } 0 \leqq \eta < 1,$$

$y'_1, \ldots y'_{n-1}$ et $a_r^{(\tau)}$ étant des nombres entiers.

Les inégalités (27.) seront remplacées par les suivantes:

$$\sum_{k=1}^{n-1} y'_k < m - a_r^{(\tau)} - \eta, \; y'_k > -\eta_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

ou autrement

$$\sum_{k=1}^{n-1} y'_k \leqq m - a_r^{(\tau)} - 1 \text{ et } y'_k \geqq 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots n-1)$$

Le nombre de systèmes $(y'_1, y'_2, \ldots y'_{n-1})$ des nombres entiers vérifiant ces inégalités est égal à

$$\frac{(m - a_r^{(\tau)})(m + 1 - a_r^{(\tau)}) \cdots (m + n - 2 - a_r^{(\tau)})}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1)}.$$

On en conclut que le symbole m_τ qui exprime le nombre de solutions des équations (20.) et (21.) en nombres entiers est égal à la somme

$$m_\tau = \sum_{r=1}^{\omega} \frac{(m - a_r^{(\tau)}) \cdots (m + n - 2 - a_r^{(\tau)})}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1)}.$$

84. En substituant dans la somme (22.), on obtient

$$(29.) \quad \sum_{\tau > 0}^{\tau < m\Delta} \left(\Delta - \frac{\tau}{m} \right) m_\tau = \sum_{\tau > 0}^{\tau < m\Delta} \left(\Delta - \frac{\tau}{m} \right) \sum_{r=1}^{\omega} \frac{(m - a_r^{(\tau)}) \cdots (m + n - 2 - a_r^{(\tau)})}{1 \cdot 2 \cdot (n-1)}.$$

Cherchons une valeur approchée de la somme obtenue. En observant qu'à cause de (28.)

$$0 \leqq a_r^{(\imath)} \leqq n-1,$$

on peut poser

$$\sum_{r=1}^{\omega} \frac{(m-a_r^{(\imath)}) \cdots (m+n-2-a_r^{(\imath)})}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} = \frac{\omega}{(n-1)!} m^{n-1} + \delta_\imath m^{n-2}$$

où $|\delta_\imath|$ ne surpasse pas une limite fixe qui ne dépend pas du nombre m.

En substituant dans la somme (27.), on trouve

$$\sum_{\imath \geqq 0}^{\imath < m\Delta} \left(\Delta - \frac{\imath}{m}\right) m_\imath = \frac{\omega}{(n-1)!} m^{n-1} \sum_{\imath \geqq 0}^{\imath < m\Delta} \left(\Delta - \frac{\imath}{m}\right) + \delta \Delta^2 m^{n-1}$$

où $|\delta|$ ne surpasse pas une limite fixe qui ne dépend pas de $x_1, x_2, \ldots x_n$ et du nombre m.

En observant que

$$\sum_{\imath \geqq 0}^{\imath < m\Delta} \left(\Delta - \frac{\imath}{m}\right) = \Delta^2 \frac{m}{2} - \frac{\Delta}{2} + \frac{\vartheta}{m} \quad \text{où} \quad 0 \leqq \vartheta < \frac{1}{8},$$

on peut poser

$$(30.) \quad \sum_{\imath \geqq 0}^{\imath < m\Delta} \left(\Delta - \frac{\imath}{m}\right) m_\imath = \frac{1}{2} \frac{\omega \Delta^2}{(n-1)!} m^n + m^{n-1}(\delta \Delta^2 + \delta' \Delta + \delta'')$$

où $\delta, \delta', \delta''$ ne surpassent pas en valeur numérique une limite fixe.

En substituant dans la formule (11.) le coefficient trouvé de 2ϱ, on aura, à cause de (15.),

$$(31.) \quad m^n (\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + \varepsilon_0 + \Sigma \varepsilon_i x_i) = \frac{m^n}{(n-1)!} \sum_{k=1}^{\sigma} \varrho_k \omega_k (\Sigma p_i x_i)^2$$

$$+ m^{n-1} \sum_{k=1}^{\sigma} 2\varrho_k [\delta_k (\Sigma p_{ik} x_i)^2 + \delta'_k \Sigma p_{ik} x_i + \delta''_k].$$

Dans la formule obtenue les coefficients $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$, $\delta_k, \delta'_k, \delta''_k$ $(k = 1, 2 \ldots \sigma)$ ne surpassent pas en valeur numérique une limite fixe qui

ne dépend que des coefficients de la forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j$ et du choix de l'ensemble (L) de simplexes.

Remplaçons dans la formule obtenue les nombres $x_1, x_2 \dots x_n$ par les nombres $mx_1, mx_2 \dots mx_n$. Comme ces nombres satisfont aux conditions imposées aux nombres $x_1, x_2 \dots x_n$, la formule (31.) est applicable et on obtient

$$m^n(m^2\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j + \varepsilon_0 + m\Sigma\varepsilon_i x_i) = \frac{m^{n+2}}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{\sigma}\varrho_k\omega_k(\Sigma p_{ik}x_i)^2$$

$$+ m^{n-1}\sum_{k=1}^{\sigma}2\varrho_k[\delta_k m^2(\Sigma p_{ik}x_i)^2 + \delta'_k m\Sigma p_{ik}x_i + \delta''_k].$$

En divisant les deux parties de la formule obtenue par m^{n+2}, faisons croître indéfiniment le nombre entier positif m, il viendra

$$(32.)\qquad \Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{\sigma}\varrho_k\,\omega_k(p_{1k}x_1 + p_{2k}x_2 + \cdots + p_{nk}x_n)^2.$$

La somme qui se trouve dans le second membre de la formule obtenue s'étend à toutes les faces incongruentes à $n-1$ dimensions des simplexes de l'ensemble (L).

Nous avons déduit la formule (32.) en supposant que les nombres $x_1, x_2 \dots x_n$ forment une base irréductible. Comme les deux parties de la formule (32.) présentent deux formes quadratiques, on en conclut que la formule (32.) présente une identité. Il en résulte que la formule (32.) peut s'écrire

$$(\text{I.})\qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a'_{ij} = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{\sigma}\varrho_k\omega_k\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a'_{ij}p_{ik}p_{jk}$$

où on a posé

$$\varrho_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}^{(k)}a_{ij}, \qquad (k=1, 2 \dots \sigma)$$

les deux formes quadratiques $\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_i$ et $\Sigma\Sigma a'_{ij}x_ix_j$ étant arbitraires.

Section V.

Propriétés de l'ensemble (Δ) des formes quadratiques correspondant aux différents types de parallélоèdres primitifs.

Définition du domaine des formes quadratiques correspondant à un type de parallélоèdres primitifs.

85. Supposons qu'un type de parallélоèdres primitifs soit caractérisé par un ensemble (L) de simplexes.

Désignons par

$$\varrho_k = \Sigma\Sigma p_{ij}^{(k)} a_{ij} \qquad (k=1, 2 \dots \sigma)$$

les régulateurs qui correspondent aux différentes faces incongruentes à $n-1$ dimensions des simplexes de l'ensemble (L).

Définition. On appellera domaine de formes quadratiques correspondant au type des parallélоèdres primitifs caractérisé par l'ensemble (L) de simplexes un domaine Δ de formes quadratiques vérifiant les inégalités

$$(1.) \qquad \varrho_k = \Sigma\Sigma p_{ij}^{(k)} a_{ij} \geqq 0. \qquad (k=1, 2, \dots \sigma)$$

En vertu du théorème fondamental du n° 77, pour qu'une forme quadratique f définisse un ensemble (R) de parallélоèdres primitifs appartenant au type caractérisé par l'ensemble (L) de simplexes, il faut et il suffit que la forme f soit intérieure au domaine Δ. Il en résulte que le domaine Δ est à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions.

86. Parmi les inégalités (1.) peuvent se trouver des inégalités dépendantes. Supposons qu'on ait choisi un système d'inégalités indépendantes

$$\varrho_1 \geqq 0, \ \varrho_2 \geqq 0, \dots \varrho_m \geqq 0$$

qui définissent le domaine Δ. A l'aide des régulateurs indépendants $\varrho_1, \varrho_2 \dots \varrho_m$, on présentera tous les régulateurs sous la forme

$$(2.) \qquad \varrho_k = \sum_{r=1}^{m} h_r^{(k)} \varrho_r \text{ où } h_r^{(k)} \geqq 0 . \qquad (r=1,2\ldots m;\ k=1,2\ldots o)$$

Observons qu'aucune forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ ne vérifie les équations

$$\varrho_1 = 0,\ \varrho_2 = 0, \ldots \varrho_m = 0,$$

puisque les égalités (2.) donneraient

$$\varrho_k = 0, \qquad (k=1,2\ldots o)$$

et, en vertu de la formule (I.) du n° 84, on aurait

$$\Sigma\Sigma\, a_{ij}\, a'_{ij} = 0,$$

$\Sigma\Sigma a'_{ij} x_i x_j$ étant une forme arbitraire; il s'ensuit que

$$a_{ij} = 0. \qquad (i=1,2\ldots n;\ j=1,2\ldots n)$$

Au domaine Δ sont, donc, applicables les conclusions déduites dans mon premier mémoire cité *).

Désignons par

$$(3.) \qquad \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_s$$

les formes quadratiques qui caractérisent les différentes arêtes du domaine Δ.

Le domaine Δ de formes quadratiques sera déterminé par les égalités

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j = \sum_{u=1}^{s} u_k \varphi_k \quad \text{où } u_k \geqq 0, \qquad (k=1,2\ldots s)$$

$u_1, u_2, \ldots u_s$ étant des paramètres arbitraires positifs ou nuls.

Observons qu'en vertu de la formule (I.) du n° 84, chaque forme φ_k $(k=1,2\ldots s)$ de la série (3.) aura pour expression

*) Ce Journal t. 133, p. 97.

$$\varphi_k = \sum_{r=1}^{\sigma} \lambda_r^{(k)} (p_{1r}x_1 + p_{2r}x_2 \cdots + p_{nr}x_n)^2 \quad \text{où} \quad \lambda_r^{(k)} \geqq 0. \qquad (r=1,2\ldots\sigma;\ k=1,2\ldots s)$$

Propriétés des régulateurs indépendants.

87. En conservant les notations des n°s 69—74 supposons qu'un simplexe L de l'ensemble (L) soit caractérisé par les systèmes

$$(l_{i0}),\ (l_{i1}),\ldots(l_{in}).$$

Admettons que parmi les régulateurs

$$\varrho_0, \varrho_1, \cdots \varrho_n$$

qui correspondent aux différentes faces à n—1 dimensions du simplexe L, se trouve au moins un régulateur indépendant. Supposons, pour fixer les idées, que ϱ_0 soit un régulateur pareil.

Désignons par L_k $(k=0,\ 1, 2, \ldots n)$ les simplexes qui sont contigus au simplexe (L) par les faces à n—1 dimensions caractérisées par les systèmes

$$(l_{ih}). \qquad (h=0,1,2\ldots n;\ h\neq k;\ k=0,1,2,\ldots n)$$

Supposons qu'en remplaçant dans le simplexe L le sommet (l_{ik}) par un sommet (l'_{ik}), on obtienne le simplexe L_k $(k=0,1,2,\ldots n)$.

En vertu de la formule (6.) du n^0 73, on aura

$$(1.) \qquad 2\varrho_k \Sigma p_{ik}(l_{ih}-l'_{ik}) = F_{(L)}(l'_{1k}, l'_{2k}\ldots l'_{nk}). \qquad (k=0,1,2,\ldots n;\ h\neq k)$$

Posons

$$(2.) \qquad l'_{ik} = \sum_{k=0}^{n} \vartheta_r^{(k)} l_{ik} \quad \text{où} \quad \sum_{r=0}^{n} \vartheta_r^{(k)} = 1. \qquad (k=0,1,2,\ldots n)$$

Comme, à cause de l'inégalité (14.) du n^0 70,

$$\Sigma p_{ik}(l_{ih}-l'_{ik}) > 0, \qquad (h\neq k)$$

il vient, en vertu de (2.),

$$\vartheta_k^{(k)} < 0. \qquad (3.) \qquad (k=0,1,2,\dots n)$$

Examinons les nombres

$$\vartheta_0^0, \vartheta_1^0, \dots \vartheta_n^0 \qquad (4.)$$

qui correspondent au régulateur indépendant ϱ_0. On aura, à cause de (3.),

$$\vartheta_0^0 < 0.$$

Je dis que parmi les nombres $\vartheta_1^0, \vartheta_2^0, \dots \vartheta_n^0$ au moins deux nombres sont positifs. Comme $\sum_{k=0}^{n} \vartheta_k^0 = 1$, il est évident qu'au moins un nombre, par exemple ϑ_n^0, sera positif. Admettons que ϑ_n^0 soit le seul nombre positif dans la série (4.).

Désignons, pour fixer les idées,

$$\vartheta_0^0 < 0,\ \vartheta_1^0 < 0, \dots \vartheta_\lambda^0 < 0,\ \vartheta_\lambda^0 = 0, \dots \vartheta_{n-1}^0 = 0,\ \vartheta_n^0 > 0. \qquad (5.)$$

La valeur correspondante de la fonction $F_{(L)}(l'_{10}, \dots l'_{n0})$, en vertu de la formule (4.) du n° 73, peut être présentée sous la forme

$$F_{(L)}(l'_{10}, \dots l'_{n0}) = \Sigma\Sigma a_{ij} (l'_{i0} - l_{in}) (l'_{j0} - l_{jn}) - \sum_{k=0}^{\lambda} \vartheta_k \Sigma\Sigma a_{ij} (l_{ik} - l_{in}) (l_{jk} - l_{jn}). \qquad (6.)$$

En vertu de la formule (I.) du n° 84 et des inégalités (5.), on peut présenter cette égalité sous la forme

$$F_{(L)}(l'_{10}, \dots l'_{n0}) = \sum_{r=1}^{\sigma} h_r \varrho_r \quad \text{où} \quad h_r \geqq 0,$$

et comme d'autre part, à cause de (1.)

$$(7.)\qquad 2\varrho_0 \Sigma p_{i0}\,(l_{ih}-l'_{i0}) = F_{(L)}(l'_{10}, \ldots l'_{n0}),$$

il vient

$$\varrho_0 = \sum_{r=1}^{\sigma} g_r\,\varrho_r \text{ où } g_r \geqq 0. \qquad (r=1,2,\ldots\sigma)$$

Nous avons supposé que ϱ_0 soit un régulateur indépendant, donc il est nécessaire que

$g_2 = 0$ tant qu'un régulateur ϱ_r n'est pas proportionnel à ϱ_0.

La formule (6.) donne

$$\Sigma\Sigma a_{ij}\,(l'_{i0}-l_{in})\,(l'_{j0}-l_{jn}) = \delta\varrho_0 \quad \text{où } \delta > 0,$$

$$\Sigma\Sigma a_{ij}\,(l_{ik}-l_{in})\,(l_{jk}-l_{jn}) = \delta_k\varrho_0 \quad \text{où } \delta_k > 0. \qquad (k=0,1,2,\ldots\lambda)$$

Il s'ensuit qu'on aura identiquement

$$\Sigma\Sigma a_{ij}\,(l'_{i0}-l_{in})\,(l'_{j0}-l_{jn}) = \frac{\delta}{\delta_k}\,\Sigma\Sigma a_{ij}\,(l_{ik}-l_{in})\,(l_{jk}-l_{jn}).$$

Pour que cette identité subsiste, il faut et il suffit que

$$l'_{i0}-l_{in} = \sqrt{\frac{\delta}{\delta_k}}\,(l_{ik}-l_{in}).$$

En vertu du théorème I du n° 51, les nombres $l'_{i0}-l_{in}$ $(i=1,2,\ldots n)$, et $l_{ik}-l_{in}$ $(i=1,2,\ldots n)$, n'ont pas de diviseur commun, on en conclut que

$$l'_{i0} = l_{ik},$$

ce qui est impossible.

Désignons, pour fixer les idées,

$$(8.)\quad \vartheta_0^0 < 0,\ \vartheta_1^0 < 0, \ldots \vartheta_\lambda^0 < 0,\ \vartheta_{\lambda+1}^0 = 0, \ldots \vartheta_\mu^0 = 0,\ \vartheta_{\mu+1}^0 > 0, \ldots \vartheta_n^0 > 0$$

où $\lambda \geqq 0$ et $\mu \leqq n-2$.

88. *Théorème: En remplaçant dans le simplexe L les sommets* (l_{ik}), $k=0, 1, 2, \dots \lambda$, *successivement par le sommet* (l'_{i0}), *on obtiendra les simplexes*

$$L_0, L_1, \dots L_\lambda \tag{9.}$$

qui sont contigus au simplexe L et deux à deux par les faces à $n-1$ *dimensions dont les régulateurs sont proportionnels au régulateur* ϱ_0.

Appliquons la formule (*) du n° 74 aux simplexes L et L_k $(k=0, 1, 2, \dots \lambda)$; on aura

$$F_{(L)}(l'_{10}, \dots l'_{n0}) = F_{(L_k)}(l'_{10}, \dots l'_{n0}) + 2\varrho_k \Sigma p_{ik}(l_{ih} - l'_{i0}). \quad (h \neq k;\ n=0, 1, 2, \dots \lambda)$$

En vertu de (8.), on obtient

$$\Sigma p_{ik}(l_{ih} - l'_{i0}) > 0. \quad (h \neq k, k=0, 1, 2, \dots \lambda)$$

Ayant égard à la formule (7.), on trouve

$$F_{(L_k)}(l'_{10}, \dots l'_{n0}) = \delta_k \varrho_0 \quad \text{où} \quad \delta_k \geqq 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots \lambda)$$

et

$$\varrho_k = u_k \varrho_0 \quad \text{où} \quad u_k > 0. \tag{10.} \quad (k=0, 1, 2, \dots \lambda)$$

En vertu de (1.) et (7.), il vient

$$F_{(L)}(l'_{1k}, \dots l'_{nk}) = \omega_k F_{(L)}(l'_{10}, \dots l'_{n0}) \text{ où } \omega_k > 0. \quad (k=0, 1, 2, \dots \lambda)$$

L'égalité obtenue présente une identité par rapport aux coefficients de la forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$. On en tire, à cause de (2.), les égalités

$$(\vartheta_i^{(k)})^2 - \vartheta_i^{(k)} = \omega_k((\vartheta_i^0)^2 - \vartheta_i^0), \quad (i=0, 1, 2, \dots n)$$

$$\vartheta_i^{(k)} \vartheta_j^{(k)} = \omega_k \vartheta_i^0 \vartheta_j^0. \quad (i=0, 1, 2, \dots n;\ j=0, 1, 2, \dots n;\ i \neq j)$$

Comme $\sum_{i=0}^{n} \vartheta_i^{(k)} = 1$ et $\sum_{i=0}^{n} \vartheta_i^0 = 1$, il est nécessaire que $\omega_k = 1$ et

$$\vartheta_i^{(k)} = \vartheta_i^{(0)}, \qquad (i=0, 1, 2, \dots n)$$

donc

$$l'_{ik} = l'_{i0}. \qquad (k=0, 1, 2, \dots \lambda)$$

La formule (1.) devient dans ce cas

$$2\varrho_k \Sigma p_{ik}(l_{ih} - l'_{i0}) = F_{(L)}(l'_{10}, \dots l'_{n0}). \qquad (h \neq k; k=0, 1, 2, \dots \lambda)$$

Observons que les simplexes

$$L, L_0, L_1 \dots L_\lambda$$

composent un groupe de simplexes parfaitement déterminé correspondant au régulateur indépendant ϱ_0. Ce que nous avons dit concernant le simplexe L peut être rapporté à tous les simplexes de la série (9.) Tous les simplexes qui restent $L_{\lambda+1}, \dots L_n$ sont contigus au simplexe L par les faces dont les régulateurs ne sont pas proportionnels à ϱ_0.

89. Observons que les simplexes (9.) composent un polyèdre convexe K ayant $n+2$ sommets

$$(l'_{i0}),\ (l_{i0}), \dots (l_{in}).$$

En effet, tous les points des simplexes (9.) appartiennent au polyèdre K composé des points déterminés par les égalités

$$(11.) \quad x_i = u l'_{i0} + \sum_{k=0}^{n} u_k l_{ik} \quad \text{où } u + \sum_{u=0}^{n} u_k = 1 \text{ et } u \geqq 0,\ u_k \geqq 0. \qquad (k=0, 1, 2, \dots n)$$

Je dis que chaque point (x_i) déterminé par ces égalités appartient au moins à un des simplexes (9.)

Supposons, en premier lieu, qu'on ait les inégalités

$$u_k + u\vartheta_k^0 \geqq 0. \qquad (k=0, 1, 2, \dots n)$$

On présentera l'égalité (11.), à cause de (2.), sous la forme suivante:

$$x_i = \sum_{k=0}^{n} (u_k + u\vartheta_k^0)\, l_{ik}$$

et, comme $\sum_{k=0}^{n} (u_k + u\vartheta_k^0) = 1$, on en conclut que le point (x_i) appartient au simplexe L.

Cela posé, supposons qu'au moins un des nombres $u_k + u\vartheta_k^0$, $k = 0, 1, 2, \ldots n$, soit négatif. Choisissons parmi les nombres

$$\frac{u_0}{\vartheta_0^0}, \frac{u_1}{\vartheta_1^0}, \cdots \frac{u_\lambda}{\vartheta_\lambda^0}$$

qui sont tous négatifs ou nuls, à cause de (8.) et (11.), un nombre $\frac{u_k}{\vartheta_k^0}$ dont la valeur numérique est la plus petite. Le point (x_i) déterminé par les égalités (11.) appartient dans ce cas au simplexe L_k. Pour le démontrer, on présentera les égalités (11.) sous la forme

$$x_i = \left(u + \frac{u_k}{\vartheta_k}\right) l'_{i0} + \sum_r \left(u_r - u_k \frac{\vartheta_r}{\vartheta_k}\right) l_{ir} . \qquad (r = 0, 1, 2, i \ldots n;\ r \neq k)$$

En vertu des suppositions faites, on aura les inégalités

$$u + \frac{u_k}{\vartheta_k} > 0, \qquad u_r - u_k \frac{\vartheta_r}{\vartheta_k} \geqq 0, \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots n;\ r \neq k)$$

et, comme

$$u + \frac{u_k}{\vartheta_k} + \sum_r \left(u_r - u_k \frac{\vartheta_r}{\vartheta_k}\right) = 1,$$

on en conclut que le point (x_i) appartient au simplexe L_k $(u = 0, 1, 2 \ldots \lambda)$.

Examinons les faces à $n-1$ dimensions du polyèdre K. En vertu des conditions (8.), le polyèdre K possède $\mu - \lambda$ faces à $n-1$ dimensions Q_k qui sont caractérisés par $n+1$ sommets

$$(l'_{i0}),\ (l_{ih}) . \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots n;\ h \neq k;\ k = \lambda + 1, \ldots \mu)$$

Le sommet (l_{ik}) où $k = \lambda + 1, \ldots \mu$ est opposé à la face θ_k $(k = \lambda + 1, \ldots \mu)$.

Toutes les faces à $n-1$ dimensions du polyèdre K qui restent sont caractérisées par n sommets. On les caractérisera dans le polyèdre K par deux sommets opposés.

On obtient de cette manière $n-\mu$ faces P_k $(k=\mu+1,\dots n)$ du polyèdre K caractérisées par deux sommets opposés (l'_{i0}) et (l_{ik}) $(k=\mu+1,\dots n)$ et on obtient $(\lambda+1)(n-\mu)$ faces P_{kh} $(h=0,1,2,\dots\lambda;\ k=\mu+1,\dots n)$ caractérisées par deux sommets opposés (l_{ik}) et (l_{ih}).

90. Observons que le polyèdre K est contigu par les faces Q_k $(k=\lambda+1,\dots\mu)$ à d'autres polyèdres analogues K_k $(k=\lambda+1,\dots\mu)$ qui sont définis par le régulateur indépendant ϱ_0.

Pour le démontrer, examinons le simplexe L_k $(k=\lambda+1,\dots\mu)$ contigu au simplexe L par la face *à* $n-1$ dimensions caractérisée par les sommets

$$(l_{ih}). \qquad (h=0,1,2\dots n;\ h\neq k;\ k=\lambda+1,\dots\mu)$$

Cette face présente une partie de la face correspondante Q_k du polyèdre K.

En appliquant la formule (*) du n° 74 aux simplexes L et L_k, on obtient

$$F_{(L)}(l'_{10},\dots l'_{n0})=F_{(L_k)}(l'_{10},\dots l'_{n0})+2\varrho_k\Sigma p_{ik}(l_{ih}-l'_{i0}) \text{ où } h\neq k \text{ et } n=\lambda+1,\dots\mu.$$

En vertu des conditions (8.), on aura

$$\Sigma p_{ik}(l_{ih}-l'_{i0})=0, \qquad (k=\lambda+1,\dots\mu)$$

donc, à cause de (7.),

$$F_{(L_k)}(l'_{10},\dots l'_{n0})=F_{(L)}(l'_{10},\dots l'_{n0})=2\varrho_0\Sigma p_{i0}(l_{ih}-l'_{i0}). \qquad (h\neq 0;\ k=\lambda+1,\dots\mu)$$

Comme le point (l'_{i0}) ne se trouve pas parmi les sommets du simplexe L_k, il est nécessaire que parmi les régulateurs des faces du simplexe L_k se trouvent, en vertu de l'égalité obtenue, des régulateurs qui sont proportionnels à ϱ_0.

En observant que

$$l'_{i0}=\Sigma\vartheta^0_h l_{ih}+\vartheta^0_k l'_{ik}, \quad \text{où} \quad \Sigma\vartheta^0_h+\vartheta^0_k=1.$$
$$(h=0,1,2,\dots n;\ h\neq k;\ k=\lambda+1,\dots\mu)$$

puisque à cause de (8.) $\vartheta_k^0 = 0$ $(k = \lambda+1, \dots \mu)$, on en conclut, en vertu du théorème précédent, qu'en remplaçant dans le simplexe L_k les sommets (l_{ih}) $(h = 0, 1, \dots \lambda)$ par le sommet (l'_{i0}) on obtiendra un groupe de simplexes

$$(12.) \qquad L_k,\ L_k^{(0)},\ L_k^{(1)}, \dots L_k^{(\lambda)}, \qquad (k=\lambda+1, \dots \mu)$$

qui sont contigus deux à deux par des faces à $n-1$ dimensions dont les régulateurs sont proportionnels à ϱ_0.

Désignons par K_k le polyèdre convexe composé de simplexes (12.). On obtient le polyèdre K_k en remplaçant dans le polyèdre K le sommet (l_{ik}) par le sommet (l'_{ik}) $(k = \lambda+1, \dots \mu)$. On en conclut que les polyèdres K et K_k sont contigus par la face Q_k.

Examinons d'autres faces du polyèdre K. La face P_k $(k = \mu+1, \dots n)$ appartient au simplexe L qui est contigu par la face P_k au simplexe L_k. Le régulateur ϱ_k $(k = \mu+1, \dots n)$ de cette face ne peut être proportionnel au régulateur indépendant ϱ_0.

Il peut arriver qu'aucun des régulateurs correspondant aux différentes faces du simplexe L_k ne sera proportionnel au régulateur ϱ_0. Dans ce cas, le polyèdre K ne sera contigu par la face P_k à aucun polyèdre analogue correspondant au régulateur indépendant ϱ_0.

Il peut arriver aussi que parmi les régulateurs des faces du simplexe L_k se trouvent des régulateurs qui sont proportionnels à ϱ_0; dans ce cas, le simplexe L_k appartient à un polyèdre convexe K_k qui est contigu à K par la face P_k $(k = \mu+1, \dots n)$.

De la même manière, on examinera les faces analogues P_{hk} du polyèdre K $(h = 0, 1, \dots \lambda;\ k = \mu+1, \dots n)$.

En appliquant le procédé exposé aux différents simplexes incongruents de l'ensemble (L), on déterminera les polyèdres convexes incongruents

$$K, K_1, \dots K_{\omega-1}$$

qui sont composés de groupes correspondants de simplexes appartenant à l'ensemble (L).

Reconstruction de l'ensemble (L) de simplexes en un autre ensemble (L′) de simplexes.

91. On peut partager les polyèdres convexes

$$(1.) \qquad K, K_1, \ldots K_{\omega-1}$$

correspondant à un régulateur indépendant ϱ en nouveaux simplexes.

Conservant les notations précédentes, examinons le polyèdre convexe K composé de simplexes

$$(2.) \qquad L, L_0, \ldots L_\lambda.$$

Le polyèdre K possède $n+2$ sommets

$$(l'_i), \ (l_{i0}), \ldots (l_{in}).$$

Théorème. En remplaçant dans le simplexe L caractérisé par les sommets

$$(l_{i0}), \ (l_{i1}), \ldots (l_{in})$$

un sommet (l_{ik}) *par le sommet* (l'_i) *où* $k=\mu+1, \ldots n$, *on obtient* $n-\mu$ *simplexes*

$$(3.) \qquad L'_{\mu+1}, \ldots L'_n$$

qui composent aussi le polyèdre K. Les simplexes obtenus n'appartiennent pas à l'ensemble (L) de simplexes.

Posons, comme nous l'avons fait au n° 87,

$$(4.) \qquad l'_i = \sum_{k=0}^{n} \vartheta_k l_{ik} \quad \text{où} \quad \sum_{k=0}^{n} \vartheta_k = 1$$

et

$$(5.) \ \vartheta_0<0, \ \vartheta_1<0, \ldots \vartheta_\lambda<0, \ \vartheta_{\lambda+1}=0, \ldots \vartheta_\mu=0, \ \vartheta_{\mu+1}>0, \ldots \vartheta_n>0.$$

Il est clair que chaque point des simplexes (3.) appartient au polyèdre K.

Soit (x_i) un point quelconque du polyèdre K déterminé à l'aide des égalités

$$(6.)\quad x_i = u l'_i + \sum_{k=0}^{n} u_k l_{ik} \text{ où } u + \Sigma u_k = 1,\ u \geqq 0,\ u_k \geqq 0. \qquad (k=0,1,\ldots n)$$

Choisissons parmi les nombres

$$\frac{u_{\mu+1}}{\vartheta_{\mu+1}}, \cdots \frac{u_n}{\vartheta_n}$$

celui qui est le plus petit. Supposons, pour fixer les idées, que

$$\frac{u_r}{\vartheta_r} \geqq \frac{u_k}{\vartheta_k}. \qquad (r=\mu+1\ldots n)$$

Je dis que le point (x_i) appartient au simplexe L'_k. En effet, l'égalité (6.) peut être mise, à cause de (4.), sous la forme

$$x_i = \left(u + \frac{u_k}{\vartheta_k}\right) l'_i + \sum_h \left(u_h - u_k \frac{\vartheta_h}{\vartheta_k}\right) l_{ih}. \qquad (h=0,1,\ldots n; h \neq k)$$

En observant que

$$u + \frac{u_k}{\vartheta_k} \geqq 0,\ u_h - u_k \frac{\vartheta_h}{\vartheta_k} \geqq 0, \qquad (h=0,1,\ldots n; h \neq k)$$

et que

$$u + \frac{u_k}{\vartheta_k} + \sum_h \left(u_h - u_k \frac{\vartheta_h}{\vartheta_k}\right) = 1, \qquad (h=0,1,2,\ldots n;\ h \neq k)$$

on en conclut que le point (x_i) appartient au simplexe L'_k $(k = \mu+1, \ldots n)$.

Les simplexes (3.) ne peuvent appartenir à l'ensemble (L), puisque cet ensemble, en vertu du théorème I du n° 61, partage uniformément l'espace à n dimensions.

92. Supposons qu'on ait remplacé dans l'ensemble (L) le groupe de simplexes (2.) par le groupe correspondant (3.). Admettons qu'on ait effectué cette reconstruction des simplexes de l'ensemble (L) par rapport à tous les polyèdres qui sont congruents aux polyèdres (1.). On obtient de cette manière un nouvel ensemble (L') de simplexes qui jouit des propriétés suivantes.

1. *L'ensemble* (L') *de simplexes remplit uniformément l'espace à* n *dimensions.*

2. *L'ensemble* (L') *peut être partagé en classes de simplexes congruents et le nombre des classes différentes est fini.*

Cherchons les régulateurs et les caractéristiques des faces à $n-1$ dimensions des simplexes appartenant à l'ensemble (L').

Soient L' et L'_0 deux simplexes quelconques de l'ensemble (L') qui sont contigus par une face P à $n-1$ dimensions. Admettons que les deux simplexes L' et L'_0 appartiennent aussi à l'ensemble (L). Dans ce cas le régulateur et la caractéristique de la face P dans l'ensemble (L') ne changent pas.

Supposons qu'au moins un des simplexes examinés n'appartienne pas à l'ensemble (L) de simplexes. Ce simplexe appartiendra dans ce cas à un polyèdre qui est congruent à un polyèdre de la série (1.). Supposons pour fixer les idées que ce soit le polyèdre K.

En observant que le simplexe examiné se trouve parmi les simplexes (3.) choisissons un de ces simplexes L'_k $(k=\mu+1,\dots n)$ et examinons les régulateurs et les caractéristiques de toutes ces faces à $n-1$ dimensions.

En vertu de la définition établie, le simplexe L'_k est caractérisé par les sommets

$$(l_{i0}),\dots(l_{i,k-1}),(l'_i),(l_{i,k+1}),\dots(l_{in}). \qquad (k=\mu+1,\dots n)$$

Désignons par P_{hk} une face à $n-1$ dimensions du simplexe L'_k qui est opposée au sommet (l_{ih}) $(h=0,1,2,\dots;\ h\neq k)$. Par P_k désignons la face du simplexe L'_k qui est opposée au sommet (l'_i).

Toutes les faces à $n-1$ dimensions du simplexe L'_k peuvent être partagées en trois groupes:

(1.) $$P_{0k}, P_{1k}, \ldots P_{\lambda k} \text{ et } P_k;$$

(2.) $$P_{\lambda+1,k}, \ldots P_{\mu k};$$

(3.) $$P_{\mu+1,k}, \ldots P_{k-1,k}, P_{k+1,k}, \ldots P_{nk}.$$

93. Cherchons les régulateurs des faces du simplexe L'_k appartenant au premier groupe.

Examinons, en premier lieu, la face P_k. Comme la face P_k est caractérisée par les sommets

$$(l_{i0}), \ldots (l_{i,k-1}), (l_{i,k+1}), \ldots (l_{in}),$$

elle présente une face du polyèdre K.

Dans l'ensemble (L) la face P_k appartenait à deux simplexes L et L_k. Deux cas sont à distinguer:

Premier cas: le simplexe L_k appartient à l'ensemble (L').

Désignons par ϱ_k le régulateur et par (p_{ik}) la caractéristique de la face P_k dans l'ensemble (L) par rapport au simplexe L.

Désignons par ϱ'_k le régulateur de la face P_k dans l'ensemble (L'). La caractéristique de la face P_k dans l'ensemble (L') par rapport au simplexe L'_k sera (p_{ik}).

En vertu de la définition établie au n° 73, on peut poser

$$F_{(L_k)}(l'_1, \ldots l'_n) = 2\varrho'_k \Sigma(-p_{ik})(l_{ih} - l'_i). \qquad (h \neq k)$$

En appliquant la formule (*) du n° 74 aux simplexes L et L_k, on obtient

(7.) $$F_{(L)}(l'_1, \ldots l'_n) = F_{(L_k)}(l'_1, \ldots l'_n) + 2\varrho_k \Sigma p_{ik}(l_{ih} - l'_i). \qquad (h \neq k)$$

Il s'ensuit que

$$\varrho'_k = \varrho_k + \frac{F_{(L)}(l'_1, \ldots l'_n)}{2\Sigma p_{ik}(-l_{ih} + l'_i)}. \qquad (8.) \qquad (k = \mu+1, \ldots n)$$

Nous avons vu au n° 87 que la fonction $F_{(L)}(l'_1, \ldots l'_n)$ est proportionnelle au régulateur indépendant ϱ. Comme, en vertu de (5.),

$$\Sigma p_{ik}(-l_{ih} + l'_i) > 0, \qquad (h \neq k;\ k = \lambda+1, \ldots \mu)$$

la formule (8.) peut s'écrire

$$\varrho'_k = \varrho_k + \delta_k \varrho \text{ où } \delta_k > 0.$$

Deuxième cas: le simplexe L_k n'appartient pas à l'ensemble (L'). Dans ce cas le simplexe L_k appartient à un polyèdre convexe K_k et la face P_k appartiendra dans l'ensemble (L') à deux simplexes nouveaux.

La face P_k dans l'ensemble (L') appartient au simplexe L'_k et à un simplexe qu'on obtient en remplaçant le sommet (l'_{ik}) du simplexe L_k par un sommet nouveau qu'on désignera par (l^0_i). Désignons par L^0_k le simplexe qu'on obtient en remplaçant dans le simplexe L_k le sommet (l'_{ik}) par le sommet (l^0_i).

En vertu de la définition établie au n° 73, on aura

$$F_{(L^0_k)}(l^0_1, \ldots l^0_n) = 2\varrho'_k \Sigma p_{ik}(l_{ih} - l^0_i). \qquad (h \neq k)$$

En appliquant la formule fondamentale (*) du n° 74 aux simplexes L_k et L'_k qui sont contigus par la face P_k, on obtient

$$F_{(L_k)}(l^0_1, \ldots l^0_n) = F_{(L'_k)}(l^0_1, \ldots l^0_n) + \Sigma(-p_{ik})(l_{ih} - l^0_i)\frac{F_{(L_k)}(l'_1, \ldots l'_n)}{\Sigma(-p_{ik})(l_{ih} - l'_i)}$$

et, à cause de (7.), il vient

$$(9.) \qquad \varrho'_k = \varrho_k + \frac{F_{(L)}(l'_1, \dots l'_n)}{2\Sigma p_{ik}(-l_{ih} + l'_i)} + \frac{F_{(L_k)}(l^0_1, \dots l^0_n)}{2\Sigma p_{ik}(l_{ih} - l^0_i)}.$$

En vertu de la supposition faite, les fonctions

$$F_{(L)}(l'_1, \dots l'_n) \text{ et } F_{(L_k)}(l^0_1, \dots l^0_n)$$

sont proportionnelles au régulateur indépendant ϱ. Comme

$$\Sigma p_{ik}(-l_{ih} + l'_i) > 0 \text{ et } \Sigma p_{ik}(l_{ih} - l^0_i) > 0, \qquad (k = \mu+1, \dots n)$$

la formule (9.) peut s'écrire

$$\varrho'_k = \varrho_k + \delta_k \varrho \text{ où } \delta_k > 0. \qquad (k = \mu+1, \dots n)$$

De la même manière, on examinera le régulateur de la face P_{hk} $(h = 0, 1, 2, \dots \lambda)$.

Comme la face P_{hk} appartient dans l'ensemble (L) au simplexe L_h $(h = 0, 1, 2, \dots \lambda)$, on en conclut qu'en désignant le simplexe L_h par le simplexe L on reviendra à un des deux cas précédents.

94. Cherchons les régulateurs des faces du simplexe L'_k appartenant au deuxième groupe. Choisissons une face P_{hk} $(h = \lambda+1, \dots \mu;\ k = \mu+1, \dots n)$ dans ce groupe.

La face P_{hk} présente une partie de la face Q_k du polyèdre K.

Nous avons désigné au n° 90 par K_h le polyèdre qui est contigu au polyèdre K par la face Q_h. Le polyèdre K_h possède $n+2$ sommets

$$(l'_i), (l_{i0}), \dots (l_{i,h-1}), (l'_{ih}), (l_{i,h+1}), \dots (l_{in}).$$

Dans l'ensemble (L'), le polyèdre K_h est partagé en simplexes

$$L'_{\mu+1,h}, \dots L'_{n,h}$$

qu'on obtient en remplaçant dans les simplexes

$$L'_{\mu+1}, \dots L'_n$$

le sommet (l_{ih}) par le sommet (l'_{ih}) $(h = \lambda+1, \dots \mu)$.

On en conclut que la face P_{hk} appartient dans l'ensemble (L') à deux simplexes

$$L'_k \text{ et } L'_{kh}.$$

Désignons par ϱ'_{hk} le régulateur correspondant à la face P_{hk} dans l'ensemble (L'). Observons que la caractéristique (p'_{ih}) sera la même pour toutes les faces P_{hk} où $k = \mu+1, \dots n$ puisque ces faces composent la face Q_k du polyèdre K.

Dans l'ensemble (L), la face Q_h est partagée en faces

$$P_h, P_{h0}, \dots P_{h\lambda}$$

des simplexes $L, L_0, \dots L_\lambda$ qui ont la même caractéristique (p_{ih}). On en conclut que

$$p'_{ih} = p_{ih},$$

à condition que la caractéristique (p_{ih}) soit choisie par rapport aux simplexes (2.).

En vertu de la definition établie au n° 73, on peut poser

$$F_{(L'_k)}(l'_{1h}, \dots l'_{nh}) = 2\varrho'_{hk} \Sigma p_{ih}(l_{ir} - l'_{ih}). \qquad (r \neq h)$$

En appliquant la formule (*) du No. 74 aux simplexes L et L'_k, on aura

$$F_{(L)}(l'_{1h}, \dots l'_{nh}) = F_{(L'_k)}(l'_{1h}, \dots l'_{nh}) + \Sigma p_{ik}(l_{ir} - l'_{ih}) \frac{F_{(L)}(l'_1, \dots l'_n)}{\Sigma p_{ik}(l_{ir} - l'_i)}.$$

D'autre part, on a

$$F_{(L)}(l'_{1h}, \dots l'_{nh}) = 2\varrho_h \Sigma p_{ih}(l_{ir} - l'_{ih}), \qquad (r \neq h)$$

et par suite

$$\varrho'_{hk} = \varrho_h + \frac{\sum p_{ik}(l_{ir} - l'_{ih})}{\sum p_{ih}(l_{ir} - l'_{ih})} \cdot \frac{F_{(L)}(l'_1, \dots l'_n)}{2\sum(p_{ik} - l_{ir} + l'_i)}.$$

On peut donc écrire

$$\varrho'_{hk} = \varrho_h + \delta_{hk}\varrho. \qquad (h = \lambda+1, \dots \mu;\ k = \mu+1, \dots n)$$

Dans la formule obtenue, le nombre δ_{hk} peut être positif, négatif ou nul.

95. Cherchons les régulateurs des faces du simplexe L'_k appartenant au troisième groupe. Soit P_{hk} une face appartenant à ce groupe, $h = \mu+1, \dots n$, $h \neq k$, $k = \mu+1, \dots n$. La face P_{hk} appartient dans l'ensemble (L') à deux simplexes L'_k et L'_h de la série (3.). En remplaçant dans le simplexe L'_k le sommet (l_{ih}) par le sommet (l_{ik}), on obtient le simplexe L'_h. Il en résulte qu'en désignant par ϱ_{hk} le régulateur et par $(p_i^{(hk)})$ la caractéristique de la face P_{hk} par rapport au simplexe L'_k, on aura

$$(10.) \qquad F_{(L'_k)}(l_{1k}, \dots l_{nk}) = 2\varrho'_{hk}\sum p_i^{(hk)}(l_{ir} - l_{ik}). \qquad (r \neq h;\ r \neq k)$$

L'égalité (4.) peut s'écrire

$$l_{ik} = \frac{1}{\vartheta_k} l'_i + \sum_r \left(-\frac{\vartheta_r}{\vartheta_k}\right) l_{ir}. \qquad (r = 0, 1, 2, \dots n;\ r \neq k)$$

En observant que

$$\frac{1}{\vartheta_k} + \sum_r \left(-\frac{\vartheta_r}{\vartheta_k}\right) = 1,$$

on déterminera la valeur de la fonction $F_{(L'_k)}(l_{1k}, \dots l_{nk})$, en vertu de la formule (4.) du n° 73, par l'égalité

$$F_{(L'_k)}(l_{1k}, \dots l_{nk}) = \sum\sum a_{ij} l_{ik} l_{jk} - \frac{1}{\vartheta_k}\sum\sum a_{ij} l'_i l'_j + \sum_r \frac{\vartheta_r}{\vartheta_k}\sum\sum a_{ij} l_{ir} l_{jr}. \qquad (r = 0, 1, 2, \dots n;\ r \neq k)$$

En se rappelant qu'à cause de (4.)

$$F_{(L)}(l'_1, \ldots l'_n) = \Sigma\Sigma a_{ij} l'_i l'_j - \sum_{k=0}^{n} \vartheta_k \Sigma\Sigma a_{ij} l_{ik} l_{jk},$$

et en comparant les deux égalités obtenues, on trouve

$$F_{(L'_k)}(l_{1k}, \ldots l_{nk}) = -\frac{1}{\vartheta_k} F_{(L)}(l'_1, \ldots l'_n).$$

En substituant dans la formule (10.) l'expression trouvée de la fonction $F_{(L'_k)}(l_{1k} \ldots l_{nk})$, on obtient

$$\varrho'_{hk} = -\frac{1}{\vartheta_k} \cdot \frac{F_{(L)}(l'_1, \ldots l'_n)}{2 \sum p_i^{(hk)} (l_{ir} - l_{ik})}. \qquad (h = \mu+1, \ldots n; k = \mu+1, \ldots n; h \neq k; r \neq k)$$

On en conclut qu'en posant

$$\varrho'_{hk} = -\delta_{hk} \varrho, \qquad (h = \mu+1, \ldots n; k = \mu+h, \ldots n; h \neq k)$$

on aura $\delta_{hk} > 0$.

Algorithme pour la recherche des domaines de formes quadratiques qui sont contigus à un domaine donné par les faces à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ *dimensions.*

96. Supposons qu'un domaine Δ de formes quadratiques correspondant à un type de paralléloèdres primitifs qui est caractérisé par l'ensemble (L) de simplexes soit défini par les inégalités indépendantes

$$\varrho_k \geqq 0. \qquad (k = 1, 2, \ldots m)$$

Supposons qu'un de ces régulateurs soit proportionnel à un regulateur indépendant ϱ et reconstruisons l'ensemble (L) de simplexes en un autre ensemble (L') à l'aide du procédé exposé aux n°s 91--92.

Designons par

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_\sigma$$

tous les regulateurs des faces incongruentes des simplexes appartenant à l'ensemble (L) et désignons par

$$\varrho'_1,\ \varrho'_2,\ \dots\ \varrho'_\tau$$

tous les régulateurs des faces des simplexes appartenant à l'ensemble (L').

Nous avons vu aux n°s 93—95 que tous ces régulateurs peuvent être présentés sous la forme

$$(1.)\qquad \begin{cases} \text{ou} & \varrho'_k = -\delta_k \varrho \ \text{où}\ \delta_k > 0, \\ \text{ou} & \varrho'_k = \varrho_k + \delta_{kh}\varrho \end{cases}$$

tant qu'un régulateur ϱ'_k n'est pas proportionnel à ϱ.

Examinons le domaine D' de formes quadratiques déterminé par les inégalités

$$(2.)\qquad \varrho'_k \geqq 0. \qquad (k=1,2,\dots\tau)$$

Je dis que ces inégalités définissent un domaine de formes quadratiques à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions. En admettant le contraire, on trouvera les paramètres $u_k (k=1,2,\dots\tau)$ positifs ou nuls qui réduisent en une identité l'égalité

$$(3.)\qquad \sum_{k=1}^{\tau} u_k \varrho'_k = 0 \ \text{où}\ u_k \geqq 0. \qquad (k=1,2,\dots\tau)$$

En vertu des formules (1.), cette identité peut s'écrire

$$\sum_{k=1}^{\sigma} v_k \varrho_k \pm v\varrho = 0 \ \text{où}\ v_k \geqq 0. \qquad (k=1,2,\dots\sigma)$$

Comme le régulateur ϱ est indépendant il est nécessaire que $v_k = 0$ tant qu'un régulateur ϱ_k n'est pas proportionnel à ϱ. Il en résulte que dans l'identité (3.) on a aussi $u_k = 0$ tant qu'un régulateur ϱ'_k n'est pas proportionnel à ϱ. En vertu de (1.), l'identité (3.) prend la forme

$$\Sigma u_k(-\delta_k \varrho) = 0 \qquad \text{où } u_k \geqq 0 \text{ et } \delta_k > 0,$$

ce qui est impossible.

Le domaine Δ' défini par les inégalités (2.) correspond à un nouveau type de parallélo\u00e8dres primitifs caractérisé par l'ensemble (L') de simplexes.

Observons qu'en vertu des égalités (1.), chaque forme quadratique qui est intérieure à la face du domaine Δ déterminée par l'équation

$$\varrho = 0 \tag{4.}$$

appartient au domaine Δ' et vice-versa. On en conclut que les deux domaines Δ et Δ' sont contigus par la face à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ dimensions déterminée par l'équation (4.).

Ensemble (Δ) des domaines de formes quadratiques correspondant aux différents types des parallélo\u00e8dres primitifs.

97. A l'aide de l'algorithme exposé au n° précédent, on peut déterminer les domaines de formes quadratiques

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_m \tag{1.}$$

qui sont contigus au domaine Δ par ses faces à $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ dimensions, puis on déterminera les domaines qui sont contigus aux domaines (1.) et ainsi de suite.

Désignons par (Δ) l'ensemble composé de tous les domaines de formes quadratiques qui correspondent aux differents types de parallélo\u00e8dres primitifs.

Théorème I. *L'ensemble (Δ) des domaines de formes quadratiques partage uniformément l'ensemble de toutes les formes quadratiques positives à n variables.*

Soit $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ une forme quadratique positive arbitraire. Choisissons une forme $\varphi_0(x_1, x_2, \ldots x_n)$ qui est intérieure au domaine Δ et examinons un vecteur g composé de formes

$$f = \varphi_0 + u(\varphi - \varphi_0) \quad \text{où} \quad 0 \leqq u \leqq 1. \tag{2.}$$

En faisant croître le paramètre u d'une manière continue dans l'intervalle $0 \leqq u \leqq 1$, on déterminera une série de domaines

$$(3.) \qquad \Delta, \Delta', \ldots \Delta^{(k)}$$

qui sont contigus successivement par les faces à $\frac{n(n+1)}{2}-1$ dimensions et qui renferment les différentes formes du vecteur g.

Je dis que la série de domaines (3.) se terminera toujours par un domaine auquel appartient la forme quadratique donnée φ.

Pour le démontrer, désignons par

$$(4.) \qquad (l_{i1}), (l_{i2}), \ldots (l_{i\tau}) \quad \text{où} \quad \tau = 2^n - 1$$

les systèmes qui caractérisent les faces à $n-1$ dimensions des paralléloèdres primitifs appartenant au type qui correspond au domaine Δ de formes quadratiques.

Désignons par le symbole $N(f)$ une somme

$$N(f) = \sum_{h=1}^{\tau} f(l_{1h}, \ldots l_{nh})$$

des valeurs d'une forme $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ correspondant aux systèmes (4.).

Désignons, pareillement, par

$$(5.) \qquad (l_{i1}^{(k)}), (l_{i2}^{(k)}), \ldots (l_{i\tau}^{(k)}) \text{ où } \tau = 2^n - 1$$

les systèmes qui caractérisent les faces à $n-1$ dimensions des paralléloèdres primitifs appartenant au type qui correspond à un domaine $\Delta^{(k)}$ de la série (3.) et posons

$$N^{(k)}(f) = \sum_{h=1}^{\tau} f(l_{1h}^{(k)}, \ldots l_{nh}^{(k)}). \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

Nous avons vu au n° 55 que les systèmes (4.) et (5.) sont congrus par rapport au module 2. En vertu du théorème du n° 48, on aura une inégalité

$$N(f) < N^{(k)}(f), \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

tant qu'une forme quadratique f est intérieure au domaine Δ. Il en résulte que l'inégalité

$$N(f) \leqq N^{(k)}(f) \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

subsiste à condition qu'une forme f appartienne au domaine Δ.

Cela posé, observons qu'en vertu de la supposition faite, la forme φ_0 est intérieure au domaine Δ, on aura donc l'inégalité

$$N(\varphi_0) < N^{(k)}(\varphi_0). \qquad (k=1, 2, \ldots) \tag{6.}$$

Soit f une forme du vecteur g qui appartient au domaine $\Delta^{(k)}$ de la série (3.).

On aura une inégalité

$$N(f) \geqq N^{(k)}(f). \tag{7.}$$

En observant qu'à cause de (2.)

$$N(f) = (1-u)\,N(\varphi_0) + u\,N(\varphi),$$
$$N^{(k)}(f) = (1-u)\,N^{(k)}(\varphi_0) + u\,N^{(k)}(\varphi),$$

l'inégalité (7.) peut s'écrire

$$u[N(\varphi) - N^{(k)}(\varphi)] \geqq (1-u)[N^{(k)}(\varphi_0) - N(\varphi_0)].$$

Comme $0 < u \leqq 1$, cette inégalité donne, à cause de (6.),

$$N^{(k)}(\varphi) \leqq N(\varphi). \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

La forme quadratique φ étant positive, il n'existe qu'un nombre limité de différents systèmes (5.) vérifiant cette inégalité. D'autre part, il n'existe qu'un nombre limité de domaines de formes appartenant à l'ensemble (Δ) qui sont caractérisés par les mêmes systèmes (5.). On en conclut que la série (3.) se terminera toujours par un domaine auquel appartient la forme quadratique donnée φ.

Observons qu'une forme quadratique φ qui est intérieure à un domaine Δ n'appartient à aucun autre domaine de l'ensemble (Δ), puisque le parallélоèdre primitif correspondant à la forme quadratique φ appartiendra au type caractérisé par le domaine Δ et ne peut appartenir à aucun autre type de parallélоèdres.

Supposons qu'une forme quadratique positive φ soit intérieure à une face P à un nombre quelconque de dimensions du domaine Δ. L'ensemble de toutes les formes quadratiques appartenant à la face P sera parfaitement déterminé par un certain type de parallélоèdres imprimitifs. On en conclut que la forme φ ne peut appartenir qu'aux domaines qui sont contigus par la face P.

98. En effectuant les transformations différentes de l'ensemble (Δ) de formes quadratiques à l'aide des substitutions à coefficients entiers et du déterminant qui est égal à ± 1, on ne fera que des permutations des domaines de l'ensemble (Δ).

On en conclut que l'ensemble (Δ) de domaines de formes peut être partagé en classes de domaines composées de domaines équivalents.

Théorème II. *Le nombre des classes différentes de domaines appartenant à l'ensemble* (Δ) *est fini.*

Choisissons un domaine quelconque Δ de l'ensemble (Δ) et soit φ une forme qui est intérieure au domaine Δ. Nous avons vu au n°. 54 que la forme quadratique positive φ peut être transformée en une autre forme équivalente φ' qui jouit de la propriété que les systèmes (4.) correspondant à la forme φ' sont composés de nombres entiers qui ne surpassent pas en valeur numérique une limite fixe.

La forme φ' est intérieure à un domaine Δ' qui est équivalent au domaine Δ.

Comme le domaine Δ' est caractérisé par les systèmes de nombres entiers qui ne surpassent pas en valeur numérique une limite fixe, il n'existe qu'un nombre limité de domaines pareils dans l'ensemble (Δ).

Le théorème énoncé est donc démontré.

99. A l'aide de l'algorithme exposé au n° 96, on peut déterminer successivement tous les représentants

(8.) $$\Delta, \Delta_1, \ldots \Delta_{\mu-1}$$

des différentes classes de domaines appartenant à l'ensemble (Δ).

Les domaines obtenus jouissent des mêmes propriétés que les domaines de formes quadratiques qui ont été étudiés dans mon premier mémoire cité*). Il en résulte que les domaines (8.) peuvent servir à la réduction des formes quadratiques positives. En appelant réduites les formes quadratiques positives qui appartiennent aux domaines (8.), on obtient une nouvelle méthode de réduction des formes quadratiques positives qui est tout à fait analogue à une méthode de réduction des formes quadratiques positives exposée dans le mémoire cité.

Sur les parallèloèdres imprimitifs correspondant aux formes quadratiques positives.

100. Supposons qu'une forme quadratique positive φ définisse un parallèloèdre imprimitif R.

En vertu du théorème I du n° 97, la forme φ appartient au moins à un domaine de l'ensemble (Δ). La forme φ ne peut être intérieure à aucun domaine de l'ensemble (Δ) puisqu'autrement le parallèloèdre R serait primitif.

Donc, la forme φ appartient à une face des domaines de l'ensemble (Δ).

Il en résulte que les coefficients de la forme φ vérifient une ou plusieurs équations linéaires

$$\Sigma\Sigma p_{ij} a_{ij} = 0$$

à coefficients rationnels $p_{i,j}$ $(i=1, 2, \ldots n;\ j=1, 2, \ldots n)$.

On en conclut qu'une forme quadratique positive $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j$ dont les coefficients présentent une base irréductible ne peut définir qu'un parallèloèdre primitif.

Supposons que la forme examinée φ soit intérieure à une face P à un nombre quelconque de dimensions des domaines appartenant à l'ensemble (Δ).

---

*) Ce Journal, t. 133.

Désignons par

$$\Delta, \Delta', \ldots \Delta^{(m)}$$

les domaines de l'ensemble (Δ) qui sont contigus par la face P.

En vertu de ce qui a été dit au n° 97, on aura les égalités

$$N(\varphi) = N'(\varphi) = \ldots = N^{(m)}(\varphi).$$

On en conclut qu'une forme quadratique positive φ ne peut appartenir qu'à un nombre fini de domaines de l'ensemble (Δ).

101. Supposons qu'une série infinie de formes quadratiques

$$f_1, f_2, \ldots \tag{1.}$$

soit composée de formes qui sont intérieures au domaine Δ. Admettons que les formes de cette série tendent vers une limite φ.

Les formes (1.) définissent une série infinie de parallélоèdres primitifs

$$R_1, R_2, \ldots \tag{2.}$$

appartenant à un même type caractérisé par le domaine Δ qui tendent vers une limite R.

On en conclut que chaque parallélоèdre imprimitif R correspondant à une forme quadratique positive φ peut être envisagé comme une limite des parallélоèdres primitifs (2.).

Désignons par le symbole S_ν le nombre des faces à ν dimensions du parallélоèdre imprimitif R et par S_ν^0 désignons le nombre des faces à ν dimensions des parallélоèdres primitifs (2.) $(\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1)$.

Comme les faces du parallélоèdre imprimitif R sont composées des limites des faces des parallélоèdres primitifs appartenant à la série (2.), on en conclut que

$$S_\nu \leqq S_\nu^0. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

Nous avons vu au n° 65 que

$$S_\nu^0 \leqq (n+1-\nu)\, \Delta^{(n-\nu)}\, (m^n)_{m=1}, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$$

et par suite

$$S_\nu \leqq (n+1-\nu)\, \Delta^{(n-\nu)}\, (m^n)_{m=1}. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots n) \tag{3.}$$

Domaine principal de l'ensemble (Δ).

102. Appliquons la théorie générale exposée dans ce mémoire à une forme quadratique positive

$$f = nx_1^2 + nx_2^2 + \ldots + nx_n^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 \ldots - 2x_{n-1}x_n$$

où on a posé

$$a_{ii} = n \text{ et } a_{ij} = -1. \qquad (i \neq j;\ i = 1, 2, \ldots n;\ j = 1, 2, \ldots n) \tag{1.}$$

Cherchons toutes les représentations du minimum de la forme f dans un ensemble composé de tous les systèmes de nombres entiers qui sont congrus à un système $(l_1, l_2, \ldots l_n)$ par rapport au module 2. Posons

$$l_i = 1,\ i = 1, 2, \ldots \lambda \text{ et } l_i = 0,\ i = \lambda + 1, \ldots n. \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n) \tag{2.}$$

Le problème posé se réduit à la recherche du minimum de la forme

$$f(l_1 + 2x_1,\ l_2, + 2x_2, \ldots l_n + 2x_n)$$

dans l'ensemble E composé de tous les systèmes (x_i) de nombres entiers $x_1, x_2, \ldots x_n$.

Observons que la forme f, en vertu des égalités (1.), peut s'écrire

$$f = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum\sum_{i<j} (x_i - x_j)^2. \tag{3.}$$

Chaque forme

$$x_i^2, \quad (i=1,2,\dots n) \qquad\qquad (x_i-x_j)^2, \quad (i=1,2,\dots n;\ i<j;\ j=1,2,\dots n)$$

satisfait, à cause de (2.), à la condition

$$(4.) \quad \begin{cases} (l_i+2x_i)^2 \geqq l_i^2, & (i=1,2,\dots n) \\ (l_i-l_j+2(x_i-x_j))^2 \geqq (l_i-l_j)^2, & (i=1,2,\dots n;\ i<j;\ j=1,2,\dots n) \end{cases}$$

quelles que soient les valeurs entières de $x_1, x_2, \dots x_n$. Il s'ensuit, à cause de (3.), que

$$f(l_1+2x_1, l_2+2x_2, \dots l_n+2x_n) \geqq f(l_1, l_2, \dots l_n).$$

Pour qu'une égalité

$$\varphi(l_1+2x_1, l_2+2x_2, \dots l_n+2x_n) = \varphi(l_1, l_2, \dots l_n)$$

subsiste, il est nécessaire, à cause de (3.) et de (4.), qu'on ait les égalités

$$(l_i+2x_i)^2 = l_i^2, \ (l_i-l_j+2(x_i-x_j))^2 = (l_i-l_j)^2. \quad (i=1,2,\dots n;\ i<j;\ j=1,2,\dots n)$$

En vertu de (2.), on obtient

$$x_i = 0 \quad \text{ou} \quad x_i = -l_i, \qquad (i=1,2,\dots n)$$

donc la forme f ne possède que deux représentations $(l_1, l_2, \dots l_n)$ et $(-l_1, -l_2, \dots -l_n)$ du minimum dans l'ensemble examiné.

En attribuant à l'indice λ dans les égalités (2.) les valeurs $\lambda = 1, 2, \dots n$ et en permutant les nombres $l_1, l_2, \dots l_n$, on obtient 2^n-1 systèmes qui caractérisent, en vertu du théorème du n° 48, les faces à $n-1$ dimensions du parallèloèdre R correspondant à la forme quadratique positive f.

Le paralléloèdre R sera défini par $2(2^n-1)$ inégalités indépendantes

$$\begin{aligned}
&1\cdot n \pm 2x_{k_1} \geqq 0,\\
&2\cdot(n-1) \pm 2(x_{k_1}+x_{k_2}) \geqq 0, && (k_1<k_2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\lambda(n-\lambda+1) \pm 2(x_{k_1}+\ldots+x_{k_\lambda}) \geqq 0, && (k_1<k_2<\ldots<k_\lambda)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&n\cdot 1 \pm 2(x_{k_1}+x_{k_2}\ldots+x_{kn}) \geqq 0, && (k_1<k_2<\ldots<k_n)
\end{aligned}$$

où $\quad k_1=1,2,\ldots n, \quad k_2=2,\ldots n,\ldots k_\lambda=\lambda,\ldots n,\ldots k_n=n.$

Pour avoir plus de commodité dans les notations ultérieures, posons

$$(5.)\qquad u_0=x_1+x_2\ldots+x_n,\ u_1=-x_1,\ u_2=-x_2,\ \ldots u_n=-x_n$$

et observons que toutes les sommes

$$\pm x_{k_1},\ \pm(x_{k_1}+x_{k_2}),\ldots\pm(x_{k_1}+x_{k_2}+\ldots+x_{k_n})$$

s'expriment par les sommes

$$u_{h_0},\ u_{h_0}+u_{h_1},\ldots\ u_{h_0}+u_{h_1}+\ldots+u_{h_{n-1}}$$

où $h_0<h_1<h_2<\ldots<h_{n-1}$ et $h_0=0,1,2,\ldots n, h_1=1,2,\ldots n,\ldots h_{n-1}=n-1,n.$

Les inégalités qui définissent le paralléloèdre R peuvent s'écrire

$$(6.)\qquad \begin{cases}
1\cdot n+2u_{h_0}\geqq 0,\\
2\cdot(n-1)+2(u_{h_0}+u_{h_1})\geqq 0, & (h_0<h_1)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
n\cdot 1+2(u_{h_0}+u_{h_1},\ldots+u_{hn-1})\geqq 0, & (h_0<h_1\ldots<h_{n-1})
\end{cases}$$

où $h_0=0,1,2,\ldots n,\ h_1=1,2,\ldots n,\ldots\ h_{n-1}=n-1,n.$

103. Cherchons les sommets du parallélòèdre R. A cet effet, examinons un point (α_i) vérifiant les équations

$$(7.)\quad n+2u_1=0,\ 2(n-1)+2(u_1+u_2)=0,\ \dots\ n\cdot 1+2(u_1+u_2\cdots+u_n)=0.$$

En vertu de (5.), on obtient

$$(8.)\qquad \alpha_1=\frac{1}{2}n,\ \alpha_2=\frac{1}{2}(n-2),\ \alpha_k=\frac{1}{2}(n-2k+2),\dots\alpha_n=\frac{1}{2}(-n+2).$$

Je dis que le point obtenu (α_i) présente un sommet du parallélòèdre R. Pour le démontrer, examinons la forme

$$f(x_1, x_2, \dots x_n)+2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$$

ou, à cause de (8.), la forme

$$f(x_1, x_2, \dots x_n)+\sum_{i=1}^{n}(n-2i+2)\,x_i.$$

Pour que le point (α_i) déterminé par les égalités (8.) soit un sommet du parallélòèdre R, il faut et il suffit que l'inégalité

$$(9.)\qquad f(x_1, x_2, \dots x_n)+\sum_{i=1}^{n}(n-2i+2)\,x_i\geqq 0$$

subsiste dans l'ensemble E. En observant que

$$f(x_1, x_2, \dots x_n)+\sum_{i=1}^{n}(n-2i+2)\,x_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+x_i)+\sum_{i<j}\sum[(x_i-x_j)^2+x_i-x_j],$$

on obtient l'inégalité (9.) puisque les inégalités

$$x_i^2+x_i\geqq 0,\ (x_i-x_j)^2+x_i-x_j\geqq 0,\qquad (i=1,2,\dots n;\ j=2,3,\dots n)$$

ont lieu dans l'ensemble E.

Pour qu'une égalité

$$(10.) \qquad f(x_1, x_2, \dots x_n) + \sum_{i=1}^{n} (n-2i+2)\, x_i = 0$$

subsiste, il faut et il suffit qu'on ait les égalités

$$x_i^2 + x_i = 0, \quad (x_i - x_j)^2 + x_i - x_j = 0. \quad {\scriptstyle (i=1,2,\dots n;\ i<j;\ j=2,3,\dots n)}$$

On en tire

$$x_i = -1, \quad {\scriptstyle (i=1,2,\dots \lambda)} \qquad x_i = 0. \quad {\scriptstyle (i=\lambda+1,\dots n)}$$

En attribuant à l'indice λ les valeurs $\lambda = 0, 1, 2, \dots n$ on obtient $n+1$ systèmes vérifiant l'égalité (10.)

$$(0, 0, \dots 0),\ (-1, 0, \dots 0),\ (-1, -1, 0, \dots 0), \dots (-1, -1, \dots -1).$$

Il est donc démontré que le point (α_i) déterminé par les équations (7.) présente un sommet simple du paralléloèdre R.

Introduisons dans nos recherches un symbole

$$(11.) \qquad (h_0, h_1, h_2, \dots h_n)$$

dans lequel les indices $h_0, h_1, \dots h_n$ présentent une permutation des nombres $0, 1, 2, \dots n$ et convenons de désigner par ce symbole un point qui vérifie les équations

$$(12.) \qquad n + 2u_{h_0} = 0,\ 2(n-1) + 2(u_{h_0} + u_{h_1}) = 0, \dots$$
$$n + 2(u_{h_0} + u_{h_1} + \dots + u_{h_{n-1}}) = 0.$$

En vertu de la définition établie du symbole (11.), le sommet (α_i) du paralléloèdre R déterminé par les équations (7.) sera caractérisé par le symbole

$$(1, 2, \dots n, 0).$$

Je dis que chaque symbole (11.) caractérise un sommet du parallèloèdre R.

Pour le démontrer, effectuons une transformation du parallèloèdre R à l'aide d'une substitution

$$(13.) \qquad u_1 = u'_{h_0},\ u_2 = u'_{h_1}, \dots u_n = u'_{h_{n-1}},\ u_0 = u'_{h_n}$$

où on a posé

$$u'_0 = x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n,\ u'_1 = -x'_1,\ \dots u'_n = -x'_n.$$

Les inégalités (6.) qui définissent le parallèloèdre R seront permutées par la substitution considérée, donc le parallèloèdre R sera transformé en soi-même.

Le sommet (α_i) du parallèloèdre R déterminé par les équations (7.) sera transformé, en vertu de (13.), en un sommet du parallèloèdre R déterminé par les équations (12.), donc ce sommet sera caractérisé par le symbole (11.)

Nous avons démontré l'existence de $(n+1)!$ sommets simples du parallèloèdre R correspondant à la forme quadratique positive φ. Comme le nombre des sommets d'aucun parallèloèdre correspondant à une forme quadratique positive ne surpasse une limite $(n+1)!$, en vertu de la formule (3.) du n° 101, on en conclut que le parallèloèdre R ne possède pas d'autres sommets que ceux qui sont caractérisés par le symbole

$$(h_0, h_1, \dots h_n)$$

dans lequel on permute les indices $0, 1, 2, \dots n$ de toutes les manières possibles.

Tous les sommets du parallèloèdre R sont simples, donc le parallèloèdre R est primitif. En observant que le nombre des sommets du parallèloèdre R s'exprime par la formule

$$(14.) \qquad S_0 = (n+1)! = (n+1)\,\Delta^{(n)}(m^n)_{m=1},$$

on en conclut, en vertu de ce qui a été dit au n° 66, que le nombre

S_ν des faces à ν dimensions du paralléloèdre R s'exprime par la formule

$$S_\nu = (n+1-\nu)\ \Delta^{(n-\nu)}(m^n)_{m=1}. \qquad (\nu = 0, 1, 2 \ldots n)$$

104. Cherchons les régulateurs et les caractéristiques des faces à $n-1$ dimensions des simplexes de l'ensemble (L) qui définit le type de paralléloèdres primitifs auquel appartient le paralléloèdre examiné R.

Chaque symbole $(h_0, h_1 \ldots h_n)$ définit un simplexe caractérisé par les fonctions linéaires

$$u_{h_0},\ \ u_{h_0}+u_{h_1},\ \ \ldots u_{h_0}+u_{h_1}+\cdots+u_{h_n}.$$

En vertu de (5.), on aura identiquement

$$(15.) \qquad u_{h_0}+u_{h_1}+\cdots+u_{h_n}=0.$$

Observons que $n+1$ simplexes qu'on obtient en effectuant les permutations circulaires des indices $h_0, h_1, \ldots h_n$

$$(h_0, h_1, \ldots h_n), (h_1, h_2, \ldots h_0), \ldots (h_n, h_0, \ldots h_{n-1})$$

sont congruents. En choisissant parmi ces simplexes un représentant, on déterminera de cette manière $n!$ simplexes incongruents de l'ensemble (L).

Examinons deux simplexes déterminés par deux symboles

$$(h_0, h_1, h_2, \ldots h_n) \text{ et } (h_1, h_0, h_2, \ldots h_n)$$

qui ne diffèrent que par une transposition des indices h_0 et h_1.

En vertu de la définition établie, ces simplexes sont caractérisés par les fonctions

$$(16.) \qquad [u_{h_0},\ u_{h_0}+u_{h_1},\ u_{h_0}+u_{h_1}+u_{h_2}, \ldots u_{h_0}+u_{h_1}+\cdots+u_{h_n}]$$

et

$$(17.) \qquad [u_{h_1},\ u_{h_1}+u_{h_0},\ u_{h_1}+u_{h_0}+u_{h_2}, \ldots u_{h_1}+u_{h_0}+\cdots+u_{h_n}].$$

Ces deux simplexes ne diffèrent que par les sommets qui sont caractérisés par les fonctions u_{h_0} et u_{h_1}.

On en conclut que ces deux simplexes sont contigus par une face à $n-1$ dimensions qui est caractérisée par les fonctions

$$(8.) \qquad [u_{h_0}+u_{h_1},\ u_{h_0}+u_{h_1}+u_{h_2},\ \dots\ u_{h_0}+u_{h_1}+\dots+u_{h_n}].$$

Déterminons la caractéristique $\pm(p_i)$ de cette face. En posant, comme nous l'avons fait au n° 72,

$$u^0_{h_0}+u^0_{h_1}=\delta,\ u^0_{h_0}+u^0_{h_1}+u^0_{h_2}=\delta,\dots u^0_{h_0}+\dots+u^0_{h_i}+u^0_{h_n}=\delta,$$

on obtient, à cause de (15.), $\delta=0$ et par suite

$$(19.) \qquad u^0_{h_0}=-u^0_{h_1},\ u^0_{h_2}=0,\dots u^0_{hn}=0.$$

En désignant par (p_i) la caractéristique de le face (18.) par rapport au simplexe (16.), on aura une condition supplémentaire

$$(20.) \qquad u^0_{h_0}>0$$

qui, ajoutée aux égalitées (19.), définit bien la caractéristique (p_i).

Désignons, pour abréger,

$$(21.) \qquad h_0=i \text{ et } h_1=j$$

et supposons que $i\neq 0$ et $j\neq 0$. En vertu des égalités (5.), on aura

$$u^0_{h_0}=u^0_i=-p_i,\ u^0_{h_1}=u^0_j=-p_j.$$

En vertu de (19.) et (20.), on obtient

$$(22.) \qquad \begin{cases} p_k=0, \\ p_i=-1,\ p_j=1. \end{cases} \qquad (k=1,2,\dots n\ ;\ k\neq i;\ k\neq j)$$

On peut donc caractériser la caractéristique (p_i) par une fonction correspondante

$$\Sigma p_i x_i = -x_i + x_j.$$

Supposons que $j=0$. On aura dans ce cas les égalités

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = p_i, p_k = 0 \qquad (k=1,2\ldots n; k\neq i)$$

et par suite, à cause de (20.),

$$\Sigma p_i x_i = -x_i.$$

De la même manière on examinera le cas $i=0$. On peut réunir les trois cas examinés en désignant la caractéristique de la face (18.) par la fonction $-x_i + x_j$, à condition que $x_0 = 0$.

Cherchons le régulateur ϱ_{ij} de la face examinée. A cet effet, déterminons les nombres $\vartheta_0, \vartheta_1, \ldots \vartheta_n$ d'après les conditions

$$u_{h_\lambda} = \sum_{\lambda=0}^{n} \vartheta_\lambda (u_{h_0} + \cdots + u_{h_\lambda}) \quad \text{où} \quad \Sigma \vartheta_\lambda = 1.$$

On obtient

$$\vartheta_0 = -1, \vartheta_1 = 1, \vartheta_2 = 0, \ldots \vartheta_{n-1} = 0, \vartheta_n = 1.$$

En appliquant la formule (20.) du n° 72, on trouve

$$2\varrho_{ij}[(u^0_{hj} + \cdots + u^0_{h_\lambda}) - u^0_{h_1}] = (u_{h_1})^2 + (u_{h_0})^2 - (u_{h_0} + u_{h_1})^2$$
$$- (u_{h_0} + u_{h_1} + \cdots + u_{h_n})^2 \text{ où } \lambda > 0.$$

En vertu des égalités (15.) et (19.), cette formule se ramène à celle-ci

$$2\varrho_{ij} = (u_{h_1})^2 + (u_{h_0})^2 - (u_{h_0} + u_{h_1})^2,$$

et par suite

$$\varrho_{ij} = -u_{h_0} u_{h_1}$$

ou, à cause de (21.)

(23.) $$\varrho_i = -u_i u_j.$$

Supposons que $j = 0$; les formules (5.) donnent

$$\varrho_{i0} = x_i(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = x_1 x_i + x_2 x_i + \ldots + x_n x_i.$$

En remplaçant dans cette formule $x_i x_j$ par a_{ij}, on obtient l'expression cherchée du régulateur ϱ_{i0}

(24.) $$\varrho_{i0} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}. \qquad (i=1, 2, \ldots n)$$

En supposant que $i \neq 0$ et $j \neq 0$, on aura

$$\varrho_{ij} = -x_i x_j$$

et par suite

(25.) $$\varrho_{ij} = -a_{ij}. \qquad (i=1, 2, \ldots \nu;\ i \neq j;\ j=1, 2, \ldots n)$$

Observons que la face (18.) possède le régulateur ϱ_{ij} et la caractéristique $-x_i + x_j$ indépendamment des valeurs des indices $h_2, \ldots h_n$. On en conclut qu'il existe $(n-1)!$ faces incongruentes des simplexes de l'ensemble (L) qui possèdent le même régulateur ϱ_{ij} et la même caractéristique

$$-x_0 + x_j. \qquad (i=0, 1, 2, \ldots n;\ i \neq j;\ j=0, 1, 2, \ldots n)$$

En appliquant la formule (I.) du n° 84, on obtient

$$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j = \sum_{i<j}\Sigma\varrho_{ij}(x_i - x_j)^2, \qquad (i=0, 1, 2, \ldots n;\ i<j;\ j=1, 2, \ldots n)$$

où on a posé $x_0 = 0$, ou autrement

(26.) $$\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \varrho_{i0} x_i^2 + \sum_{i<j}\Sigma\varrho_{ij}(x_i - x_j)^2. \qquad (i=1, 2, \ldots n;\ i<j;\ j=2, 3, \ldots n)$$

Le domaine Δ de formes quadratiques correspondant au type examiné de parallélоèdres primitifs sera déterminé par les inégalités

$$\varrho_{ij} \geqq 0 \qquad (i=0,1,2,\ldots n;\ j=0,1,2,\ldots n)$$

ou autrement, à cause de (24.) et (25.), par les inégalités

$$(27.) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \geqq 0, \quad -a_{ij} \geqq 0. \qquad (i=1,2,\ldots n;\ i<j;\ j=2,3,\ldots n)$$

Le nombre de ces inégalités est égal à $\frac{n(n+1)}{2}$, donc le domaine de formes quadratiques défini par ces inégalités est un domaine simple.

En attribuant aux paramètres ϱ_{ij} $(i=0,1,2,\ldots n;\ j=0,1,2,\ldots n;\ i<j)$ dans la formule (26.) les valeurs arbitraires positives ou nulles, on déterminera toutes les formes quadratiques appartenant au domaine Δ.

Une coïncidence remarquable est à signaler. Le domaine de formes quadratiques (27.) a été étudié dans mon premier mémoire cité*) où il a été appelé domaine principal. Ce domaine correspond à une forme quadratique positive parfaite principale

$$\varphi = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + x_1 x_2 + \cdots + x_{n-1} x_n.$$

Il est remarquable que l'ensemble des caractéristiques trouvées

$$\pm x_i, \quad \pm (x_i - x_j), \qquad (i=1,2,\ldots n;\ i<j;\ j=2,3,\ldots n)$$

coïncide avec l'ensemble des représentations du minimum de la forme parfaite principale φ.

Domaines de formes quadratiques contigus au domaine principal.

105. Toutes les faces à $\frac{n(n+1)}{2}-1$ dimensions du domaine principal Δ sont équivalentes**).

Il s'ensuit que tous les domaines de formes appartenant à l'ensemble (Δ) qui sont contigus au domaine principal Δ par les faces à $\frac{n(n+1)}{2}-1$ dimensions sont équivalents.

*) Ce Journal, t. 133.

**) Voyez mon mémoire cité.

Dans le cas $n=2$ et $n=3$, l'ensemble (Δ) de domaines de formes quadratiques est composé d'une seule classe de domaines équivalents au domaine principal.

On en conclut que dans l'espace à 2 et à 3 dimensions il n'existe qu'un seul type de paralléloèdres primitifs, à condition qu'on ne considère pas comme différents les types équivalents qui correspondent aux domaines équivalents de formes quadratiques.

Supposons que $n \geqq 4$ et cherchons le domaine Δ' qui est contigu au domaine principal Δ par la face déterminée à l'aide de l'équation

$$\varrho = -a_{12} = 0.$$

En appliquant l'algorithme exposé au n° 96, déterminons les polyèdres convexes incongruents qui correspondent au régulateur indépendant ϱ.

Nous avons vu au n° 104 que le régulateur $\varrho = \varrho_{12}$ correspond aux faces communes des simplexes définis par les symboles

$$(1, 2, h_2, \dots h_n),\ (2, 1, h_2, \dots h_n)$$

où $h_2, h_3, \dots h_n$ présentent une permutation arbitraire des indices $0, 3, 4, \dots n$.

Les deux simplexes correspondants sont caractérisés par les fonctions

$$(1.) \qquad [u_1,\ u_1+u_2,\ u_1+u_2+u_{h_2},\ \dots u_1+u_2+\dots+u_{h_n}]$$

et

$$(2.) \qquad [u_2,\ u_2+u_1,\ u_2+u_1+u_{h_2},\ \dots u_2+u_1+\dots+u_{h_n}].$$

En posant

$$u_2 = \vartheta_0 u_1 + \vartheta_1 (u_1+u_2) + \vartheta_2 (u_1+u_2+u_{h_2}) + \dots + \vartheta_n (u_1+u_2+\dots+u_{h_n})$$

où $\sum_{k=0}^{n} \vartheta_k = 1$, on obtient

$$(3.) \qquad \vartheta_0 = -1,\ \vartheta_1 = 1,\ \vartheta_2 = 0, \dots \vartheta_{n-1} = 0,\ \vartheta_n = 1.$$

Comme parmi les nombres obtenus ne se trouve qu'un nombre négatif ϑ_0, on en conclut que les deux simplexes (1.) et (2.) composent un polyèdre K correspondant au régulateur indépendant ϱ.

Désignons par (L') l'ensemble des simplexes qui caractérisent le domaine de formes quadratiques Δ'. En vertu de ce qui a été dit au n° 91, le polyèdre K sera composé dans l'ensemble (L') de simplexes qu'on obtient en remplaçant les sommets du simplexe (1.) qui correspondent aux valeurs positives des nombres (3.) par le sommet caractérisé par la fonction u_2. Comme dans la série (3.) il ne se trouve que deux nombres positifs ϑ_1 et ϑ_n, on obtient deux simplexes caractérisés par les fonctions

$$(4.) \qquad [u_1, u_2, u_1 + u_2 + u_{h_2}, \dots u_1 + u_2 + \dots + u_{h_n}]$$

et

$$(5.) \qquad [u_1, u_1 + u_2, \dots u_1 + u_2 + \dots + u_{h_{n-1}}, u_2].$$

Ces deux simplexes composent le polyèdre K et remplacent dans l'ensemble (L') les deux simplexes (1.) et (2.).

En effectuant toutes les permutations des indices $h_2, \dots h_n$, on obtient $(n-1)!$ polyèdres convexes incongruents qui correspondent au régulateur indépendant ϱ.

En remplaçant dans l'ensemble (L) les simplexes congruents aux simplexes (1.) et (2.) par les simplexes qui sont congruents aux simplexes (4.) et (5.), on reconstruira l'ensemble (L) de simplexes en un ensemble (L') qui caractérise le domaine Δ'.

Observons que le nombre des simplexes incongruents de l'ensemble (L') est égal à $n!$ aussi. Il s'ensuit que le nombre des faces à ν dimensions des paralléloèdres primitifs appartenant au type caractérisé par le domaine de formes Δ' s'exprime par la formule

$$S_\nu = (n + 1 - \nu)\, \Delta^{(n-\nu)}\, (m^n)_{m=1}. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots n)$$

106. Cherchons les régulateurs et les caractéristiques des faces à $n-1$ dimensions des simplexes appartenant à l'ensemble (L').

Examinons, en premier lieu, les simplexes contigus à une face à $n-1$ dimensions qui appartiennent à l'ensemble (L) et à l'ensemble (L').

La condition nécessaire et suffisante pour que les deux simplexes caractérisés par les symboles

$$(6.)\qquad (h_0, h_1, h_2, \ldots h_n) \text{ et } (h_1, h_0, h_2, \ldots h_n),$$

qui sont contigus par une face à $n-1$ dimensions, appartiennent à l'ensemble (L') aussi, consiste en ce que dans les deux séries

$$h_0, h_1, h_2, \ldots h_n, h_0 \text{ et } h_1, h_0, h_2, \ldots h_n, h_1$$

les indices 1 et 2 ne soient pas adjacents. En posant

$$h_0 = i \text{ et } h_1 = j,$$

on obtient $(n-1)!-2(n-2)!$ paires de symboles (6.) qui satisfont à la condition posée.

En désignant par ϱ_{ij} le régulateur et par $\pm(x_i - x_j)$ la caractéristique de la face commune aux simplexes (6.) déterminés dans l'ensemble (L), on aura pour l'ensemble (L') le même régulateur

$$\varrho'_{ij} = \varrho_{ij}, \qquad (i=0,1,2,\ldots n;\ i<j;\ j=1,2,\ldots n)$$

et la même caractéristique $\pm(x_i - x_j)$, le régulateur ϱ_{12} étant exclu. Le régulateur obtenu ϱ'_{ij} et la caractéristique $\pm(x_i - x_j)$ appartiennent à $(n-1)!-2\,(n-2)!$ faces incongruentes à $n-1$ dimensions de l'ensemble (L') de simplexes.

107. Cela posé, examinons les régulateurs et les caractéristiques des faces des simplexes (4.) et (5.) qui composent le polyèdre K dans l'ensemble (L').

Le premier groupe des faces du simplexe (4.) est composé de deux faces qui sont opposées aux sommets u_1 et u_2. La première face est caractérisée par les fonctions

$$(7.)\qquad u_2,\ u_1 + u_2 + u_{h_2}, \ldots u_1 + u_2 + \cdots + u_{h_n}.$$

Cette face appartenait dans l'ensemble (L) aux simplexes caractérisés par les symboles

$$(2, 1, h_2, h_3, \dots h_n) \text{ et } (2, h_2, 1, h_3, \dots h_n).$$

Le second simplexe appartient à l'ensemble (L') aussi. Il s'ensuit que le simplexe (4.) est contigu au simplexe $(2, h_2, 1, h_3, \dots h_n)$ par la face (7.).

Posons $h_2 = i$ où $i = 0, 3, \dots n$ et désignons par ϱ'_{i1} le régulateur et par $\pm (x_1 - x_i)$ la caractéristique de la face (7.) dans l'ensemble (L'). En appliquant la formule (8.) du n° 93, on obtient

$$\varrho'_{i1} = \varrho_{i1} + \varrho. \qquad (i=0, 3, \dots n) \tag{8.}$$

De la même manière, on examinera le régulateur de la face du simplexe (4.) qui est opposée au sommet u_2. En posant $h_2 = i$, on aura

$$\varrho'_{i2} = \varrho_{i2} + \varrho. \qquad (i=0, 3, \dots n) \tag{9.}$$

Examinons le premier groupe de faces du simplexe (5.) Ce groupe est composé de deux faces qui sont opposées aux sommets u_1 et u_2. La première face est caractérisée par les fonctions

$$u_1 + u_2, u_1 + u_2 + u_{h_2}, \dots u_1 + u_2 + \dots + u_{h_{n-1}}, u_2.$$

Cette face appartenait dans l'ensemble (L) au simplexe $(2, 1, h_2, \dots h_n)$ et au simplexe congruent au simplexe $(h_n, 1, h_2, \dots h_{n-1}, 2)$ et qui est caractérisé par les fonctions

$$u_2, u_2 + u_1, u_2 + u_1 + u_{h_2}, \dots u_2 + u_1 + \dots + u_{h_{n-1}}, u_2 - u_{h_n}.$$

Ce simplexe appartient à l'ensemble (L') aussi. En posant $h_n = i$ et en appliquant la formule (8.) du n° 93, on trouve

$$\varrho'_{i2} = \varrho_{i2} + \varrho.$$

La caractéristique de cette face sera $\pm (x_2 - x_i)$, $(i = 0, 3, \dots n)$.

De la même manière on examinera la face du simplexe (5.) qui est opposée au sommet u_2.

On obtiendra en posant $h_n = i$

$$\varrho'_{i1} = \varrho_{i1} + \varrho$$

et la caractéristique sera $\pm (x_1 - x_i)$, $(i = 0, 3, \dots n)$.

Observons que le nombre des faces incongruentes, appartenant au premier groupe des simplexes de l'ensemble (L'), qui possèdent le régulateur déterminé par la formule (8.) ou par la formule (9.), est égal à $2(n-2)!$

108. Le second groupe de faces à $n-1$ dimensions du simplexe (4.) est composé de $n-2$ faces qui sont opposées aux sommets

$$u_1 + u_2 + u_{h_2},\ u_1 + u_2 + u_{h_2} + u_{h_3},\ \dots\ u_1 + u_2 + \dots + u_{h_{n-1}}.$$

Examinons une face qui est opposée au sommet $u_1 + u_2 + \dots + u_{h_k}$ $(k = 2, 3, \dots n-1)$.

Une transposition des indices h_k et h_{k+1} dans le symbole (4.) conduit au symbole

$$[u_1, u_2, \dots u_1 + u_2 + \dots + u_{h_{k-1}} + u_{h_{k+1}},\ u_1 + u_2 + \dots + u_{h_{k+1}} + u_{h_k},\ \dots u_1 + u_2 + \dots + u_{h_n}]$$

qui définit un simplexe appartenant à l'ensemble (L') et qui est contigu au simplexe (4.) par la face à $n-1$ dimensions examinée.

Posons $h_k = i$, $h_{k+1} = j$ et désignons par ϱ'_{ij} le régulateur correspondant. La caractéristique correspondante sera déterminée par les équations

$$u_1^0 = 0,\ u_2^0 = 0, \dots u_1^0 + u_2^0 + \dots + u_{h_{k-1}}^0 = 0,\ u_1^0 + u_2^0 + \dots + u_{h_{k+1}}^0 = 0,$$
$$u_1^0 + u_2^0 + \dots + u_{h_n}^0 = 0.$$

On obtient

$$u_i^0 = -u_j^0 \text{ et } u_r^0 = 0. \qquad (r = 0, 1, 2, \dots n;\ r \neq i;\ r \neq j)$$

Il s'ensuit que la caractéristique sera représentée par la fonction $\pm(x_i - x_j)$.

En posant

$$(10.)\quad u_1+u_2+\cdots+u_{h_{k-1}}+u_{h_{k+1}} = \vartheta_0 u_1+\vartheta_1 u_2+\vartheta_2(u_1+u_2+u_{h_2}) + \cdots+\vartheta_k(u_1+u_2+\cdots+u_{h_{k-1}}+u_{h_k})+\cdots+\vartheta_n(u_1+u_2+\cdots+u_{h_n})$$

où $\sum_{r=0}^{n}\vartheta_r = 1$, on obtient

$$\vartheta_0=0,\ \vartheta_1=0,\ \ldots\ \vartheta_{k-2}=0,\ \vartheta_{k-1}=1,\ \vartheta_k=-1,\ \vartheta_{k+1}=1,\ \vartheta_{k+2}=0,\ldots\vartheta_n=0,$$

à condition que $k>2$.

Le régulateur ϱ'_{ij} sera déterminé par la formule

$$2\varrho'_{ij} = (u_1+u_2+\cdots+u_{h_{k-1}}+u_{h_{k+1}})^2-(u_1+u_2+\cdots+u_{h_{k-1}})^2 + (u_1+u_2+\cdots+u_{h_k})^2-(u_1+u_2+\cdots+u_{h_{k+1}})^2.$$

Après les réductions, on trouve

$$\varrho'_{ij} = -u_{h_k}u_{h_{k+1}}$$

ou autrement

$$\varrho'_{ij} = -u_i u_j,$$

donc, en vertu de la formule (23.) du n° 104, on aura

$$(11.)\qquad \varrho'_{ij} = \varrho_{ij}. \qquad (i=0,3,\ldots n;\ j=0,3,\ldots n;\ k=3,4,\ldots n-1)$$

Examinons le cas $k=2$. L'égalité (10.) donne dans ce cas

$$\vartheta_0=1,\ \vartheta_1=1,\ \vartheta_2=-1,\ \vartheta_3=1,\ \vartheta_4=0,\ \ldots\ \vartheta_{n-1}=0,\ \vartheta_n=-1,$$

et par suite

$$2\varrho'_{ij} = (u_1+u_2+u_{h_3})^2 - u_1^2 - u_2^2 + (u_1+u_2+u_{h_2})^2 - (u_1+u_2+u_{h_2}+u_{h_3})^2 + (u_1+u_2+\cdots+u_{h_n})^2.$$

Comme $u_{h_2} = i$, $u_{h_3} = j$ et $u_1+u_2+\cdots+u_{h_n} = 0$, on obtient

$$\varrho'_{ij} = u_1u_2 - u_iu_j,$$

donc on aura dans le cas examiné

$$\varrho'_{ij} = \varrho_{ij} - \varrho. \qquad (i=0,3,\ldots n;\ j=0,3,\ldots n) \tag{12.}$$

De la même manière, on examinera les faces du simplexe (5.) appartenant au second groupe et on obtiendra les mêmes formules (11.) et (12.).

Observons que le nombre des faces incongruentes des simplexes de l'ensemble (L') qui appartiennent au second groupe et dont le régulateur est déterminé par la formule (11.) est égal à $(n-3)!\ 2\,(n-3)$. Le nombre des régulateurs qui sont déterminés par la formule (12.) est égal à $2\,(n-3)!$

109. Le troisième groupe de faces des simplexes (4.) et (5.) est composé d'une seule face

$$[u_1, u_2, u_1+u_2+u_{h_2}, \ldots u_1+u_2+\cdots+u_{h_{n-1}}]$$

qui est commune à ces deux simplexes.

La caractéristique de cette face est déterminée par les équations

$$u_1^0 = \delta,\ u_2^0 = \delta,\ u_1^0+u_2^0+u_{h_2}^0 = \delta, \ldots u_1^0+u_2^0+\cdots+u_{h_{n-1}}^0 = \delta.$$

Il en résulte que

$$u_1^0 = u_2^0 = \delta,\ u_{h_2}^0 = -\delta,\ u_{h_3}^0 = 0, \ldots u_{h_{n-1}}^0 = 0,\ u_{h_n}^0 = \delta.$$

On en conclut que $\delta = \pm 1$. En posant

$$h_2 = i \quad \text{et} \quad h_n = j,$$

on obtient la caractéristique $\pm(x_1+x_2-x_i-x_j)$.

Désignons le régulateur correspondant par ϱ'_{ij}. A l'aide des égalités

$$u + u_2 = \vartheta_0 u_1 + \vartheta_1 u_2 + \vartheta_2 (u_1 + u_2 + u_{h_2}) + \cdots + \vartheta_n (u_1 + u_2 + \cdots + u_{h_n})$$

$$\text{où } \sum_{k=0}^{n} \vartheta_k = 1,$$

on obtient

$$\vartheta_0 = 1,\ \vartheta_1 = 1,\ \vartheta_2 = 0, \ldots \vartheta_{n-1} = 0,\ \vartheta_n = -1.$$

Le régulateur ϱ'_{ij} sera déterminé par la formule

$$2\,\varrho'_{ij} = (u_1 + u_2)^2 - u_1^2 - u_2^2 - (u_1 + u_2 + \cdots + u_{h_n})^2,$$

et il vient

$$\varrho'_{ij} = u_1 u_2,$$

donc

$$\varrho'_{ij} = -\varrho. \qquad (i=0, 3, \ldots n;\ j=0, 3, \ldots n)$$

Le nombre de faces incongruentes appartenant au troisième groupe ayant la caractéristique $\pm(x_1 + x_2 - x_i - x_j)$ est égal à $2(n-3)!$

110. A l'aide des formules déduites, on peut déterminer tous les régulateurs indépendants. Posons

$$(13.)\quad \varrho'_{12} = -\varrho,\ \varrho'_{i1} = \varrho_{i1} + \varrho,\ \varrho'_{i2} = \varrho_{i2} + \varrho,\ \varrho'_{ij} = \varrho_{ij}. \qquad (i=0,3,\ldots n; i<j; j=3,\ldots n)$$

On obtient de cette manière $\frac{n(n+1)}{2}$ régulateurs indépendants ϱ'_{ij} $(i = 0, 1, 2, \ldots n;\ i < j;\ j = 1, 2, \ldots n)$.

Les résultats de nos recherches peuvent être réunis dans la table suivante:

1. Régulateur ϱ'_{12}, caractéristique $\pm(x_1 + x_2 - x_i - x_j)$, leur nombre $2(n-3)!$
2. Régulateur ϱ'_{i1}, caractéristique $\pm(x_1 - x_i)$, leur nombre $2(n-2)!$
3. Régulateur ϱ'_{i2}, caractéristique $\pm(x_2 - x_i)$, leur nombre $2(n-2)!$
4. Régulateur $\varrho'_{i1} + \varrho'_{12}$, caractéristique $\pm(x_1 - x_i)$, leur nombre $(n-1)! - 2(n-2)!$

5. Régulateur $\varrho'_{i2}+\varrho'_{12}$, caractéristique $\pm(x_2-x_i)$, leur nombre $(n-1)!-2(n-2)!$
6. Régulateur ϱ'_{ij}, caractéristique $\pm(x_i-x_j)$, leur nombre $(n-1)!-2(n-3)!$
7. Régulateur $\varrho'_{ij}+\varrho'_{12}$, caractéristique $\pm(x_i-x_j)$, leur nombre $2(n-3)!$

Les indices i et j ont les valeurs $0, 3, \ldots n$ et on a posé $x_0=0$.

Le domaine Δ' de formes quadratiques correspondant à l'ensemble (I') de simplexes est déterminé par $\frac{n(n+1)}{2}$ inégalités indépendantes

$$\varrho'_{ij}\geqq 0. \qquad (i=0,1,2,\ldots n;\ j=0,1,2,\ldots n;\ i\neq j)$$

Il en résulte que le domaine Δ' est simple.

En appliquant la formule (I.) du n° 84, on déterminera, à cause de (13.), chaque forme quadratique $\Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j$ par la formule suivante

$$(14.)\qquad \Sigma\Sigma a_{ij}x_ix_j=\sum_{i<j}\Sigma\varrho'_{ij}(x_i-x_j)^2+\varrho'_{12}\omega, \qquad (i=0,1,2\ldots n;\ j=1,2,\ldots n)$$

où on a posé $x_0=0$ et

$$\omega=(n-2)x_1^2+(n-2)x_2^2+2x_3^2+\cdots+2x_n^2+2x_1x_2-2x_1x_3-\cdots-2x_1x_n$$
$$-2x_2x_3-\cdots-2x_2x_n.$$

En attribuant aux paramètres indépendants ϱ'_{ij} $(i=0,1,\ldots n;\ j=0,1,\ldots n)$ toutes les valeurs positives ou nulles, on déterminera par la formule (14.) toutes les formes quadratiques appartenant au domaine Δ'.

Une coïncidence est à signaler: le domaine Δ' présente une partie du domaine R, correspondant à la forme parfaite φ, qui a été déterminée dans mon mémoire cité. L'ensemble composé de formes linéaires

$$\pm(x_i-x_j) \qquad (i=0,1,2,\ldots n;\ j=0,1,2,\ldots n)$$

(la forme $\pm(x_1-x_2)$ étant exclue) et de formes

$$\pm(x_1+x_2-x_i-x_j) \qquad (i=0,3,\ldots n;\ j=0,3,\ldots n)$$

où on a posé $x_0 = 0$, coïncide avec les formes linéaires qui définissent toutes les représentations du minimum de la forme parfaite φ_1.

Paralléloèdres à deux dimensions.

111. L'ensemble (Δ) des domaines de formes quadratiques binaires est composé d'une seule classe de domaines qui sont équivalents au domaine principal Δ déterminé par les inégalités

$$a + b \geqq 0, \quad -b \geqq 0, \quad c + b \geqq 0.$$

Ce sont les conditions de réduction des formes quadratiques positives binaires $ax^2 + 2bxy + cy^2$ dues à *Selling**). Chaque forme quadratique appartenant au domaine principal Δ peut être déterminée par les égalités

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu (x-y)^2 \text{ où } \lambda \geqq 0, \mu \geqq 0, \nu \geqq 0.$$

Les paramètres λ, μ et ν présentent les régulateurs de l'hexagone de *Lejeune Dirichlet**) défini par les inégalités

$$-\frac{1}{2}(\lambda + \nu) \leqq x \leqq \frac{1}{2}(\lambda + \nu),$$

$$-\frac{1}{2}(\mu + \nu) \leqq y \leqq \frac{1}{2}(\mu + \nu),$$

$$-\frac{1}{2}(\lambda + \mu) \leqq x + y \leqq \frac{1}{2}(\lambda + \mu).$$

En attribuant aux paramètres arbitraires λ, μ, ν les valeurs positives, on déterminera par ces inégalités un paralléloèdre primitif à deux dimensions, c'est-à-dire un hexagone de *Lejeune Dirichlet.*

En annulant un des paramètres λ, μ, ν, par exemple ν, on obtiendra quatre inégalités indépendantes

*) Voyez l'Introduction.

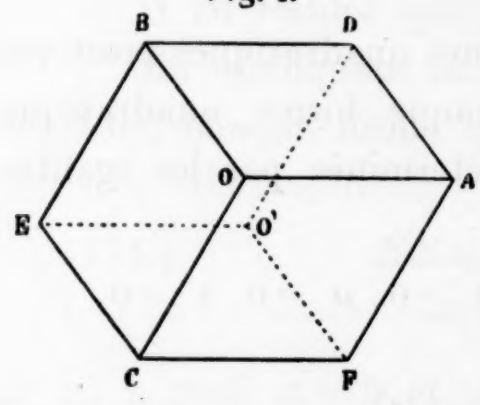
$$-\frac{1}{2}\lambda \leqq x \leqq \frac{1}{2}\lambda,$$

$$-\frac{1}{2}\mu \leqq y \leqq \frac{1}{2}\mu$$

qui définissent un paralléloèdre imprimitif à deux dimensions, c'est un parallélogramme.

Il est aisé de démontrer que d'autres paralléloèdres imprimitifs de l'espace à deux dimensions n'existent pas.

Fig. 1.



Chaque hexagone de *Lejeune Dirichlet* peut être composé de trois parallélogrammes, comme il est indiqué sur la Fig. 1.

Un des trois parallélogrammes

OADB, *OBEC* et *OCFA*

qui forment l'hexagone *ADBECF* peut être choisi arbitrairement. En choisissant, par exemple, un parallélogramme arbitraire *OADB*, on déterminera les deux parallélogrammes qui restent *OBEC* et *OCFA* en menant un vecteur arbitraire *OC*, à condition qu'en prolongeant ce vecteur dans la direction inverse on passe par le parallélogramme choisi *OADB*.

Observons qu'en général le point *O* ne présente pas le centre de l'hexagone *ADBECF*.

On peut composer le même hexagone de trois parallélogrammes *O'DBE*, *O'ECF* et *O'FAD*. On en conclut que l'hexagone de *Lejeune Dirichlet* ne présente autre chose qu'une projection d'un parallélopipède sur le plan.

Paralléloèdres à trois dimensions.

112. L'ensemble ($\mathcal{A}$) des domaines de formes quadratiques ternaires est composé d'une seule classe de domaines équivalents au domaine principal

Δ déterminé par les inégalites

$$a+b'+b''\geqq 0,\ a'+b''+b\geqq 0,\ a''+b+b'\geqq 0,\ -b\geqq 0,\ -b'\geqq 0,\ -b''\geqq 0.$$

Ce sont les conditions de réduction des formes quadratiques positives ternaires $ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy$ dues à *Selling*.

Chaque forme quadratique ternaire appartenant au domaine principal Δ peut être déterminée par les égalités

$$(1.)\qquad ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''xy=\lambda x^2+\lambda' y^2+\lambda'' z^2 + \mu(y-z)^2+\mu'(z-x)^2+\mu''(x-y)^2.$$

Tous les paralléloèdres primitifs à trois dimensions peuvent être transformés à l'aide de substitutions linéaires en paralléloèdres primitifs déterminés par 14 inégalités indépendantes

$$(2.)\quad \begin{cases} (1') & -\frac{1}{2}(\lambda+\mu'+\mu'')\leqq x\leqq\frac{1}{2}(\lambda+\mu'+\mu''), & (1)\\ (2') & -\frac{1}{2}(\lambda'+\mu''+\mu)\leqq y\leqq\frac{1}{2}(\lambda'+\mu''+\mu), & (2)\\ (3') & -\frac{1}{2}(\lambda''+\mu+\mu')\leqq z\leqq\frac{1}{2}(\lambda''+\mu+\mu'), & (3)\\ (4') & -\frac{1}{2}(\lambda'+\lambda''+\mu'+\mu'')\leqq y+z\leqq\frac{1}{2}(\lambda'+\lambda''+\mu'+\mu''), & (4)\\ (5') & -\frac{1}{2}(\lambda''+\lambda+\mu''+\mu)\leqq z+x\leqq\frac{1}{2}(\lambda''+\lambda+\mu''+\mu), & (5)\\ (6') & -\frac{1}{2}(\lambda+\lambda'+\mu+\mu')\leqq x+y\leqq\frac{1}{2}(\lambda+\lambda'+\mu+\mu'), & (6)\\ (7') & -\frac{1}{2}(\lambda+\lambda'+\lambda'')\leqq x+y+z\leqq\frac{1}{2}(\lambda+\lambda'+\lambda''). & (7) \end{cases}$$

Les paramètres λ, λ', λ'', μ, μ', μ'' présentent les régulateurs indépendants du paralléloèdre primitif défini par ces inégalités et correspondant à une forme quadratique positive ternaire (1.).

En vertu de la formule (14.) du n° 103, chaque paralléloèdre primitif de l'espace à trois dimensions possède 24 sommets qui peuvent être caractérisés par trois numéros correspondant aux différentes faces à deux dimensions du paralléloèdre défini par les inégalités (2.).

On partagera ces (24.) sommets en trois groupes I, II et III:

I	1 6 7	1′ 2 4	2′ 6′ 3	4′ 3′ 7′
	1′ 6′ 7′	1 2′ 4′	2 6 3′	4 3 7
II	1 7 5	1′ 4 3	4′ 7′ 2′	3′ 2 5′
	1′ 7′ 5′	1 4′ 3′	4 7 2	3 2′ 5
III	1 3′ 6	1′ 5′ 2	5 3 7	2′ 7′ 6′
	1′ 3 6′	1 5 2′	5′ 3′ 7′	2 7 6

Chaque ligne de cette table est composée de quatre sommets congruents. Dans chaque groupe la seconde ligne est formée de sommets opposés à ceux qui se trouvent dans la première ligne.

Examinons les régulateurs et les caractéristiques des arêtes du paralléloèdre primitif à trois dimensions. Il suffit d'examiner les régulateurs et les caractéristiques des faces à deux dimensions appartenant à trois simplexes

$$(0, 1, 6, 7), \quad (0, 1, 7, 5), \quad (0, 1, 3', 6).$$

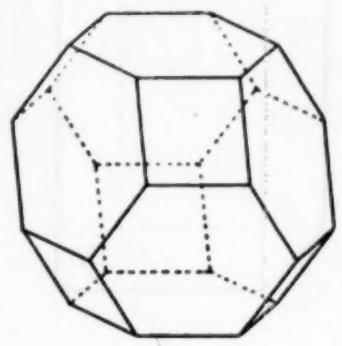
Les résultats de ces recherches peuvent être réunis dans la table suivante:

I	0 1 6 7	$\begin{matrix}-1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{matrix}$	λ	$\begin{matrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{matrix}$	μ''	$\begin{matrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{matrix}$	μ	$\begin{matrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{matrix}$	λ''
II	0 1 7 5	$\begin{matrix}-1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{matrix}$	λ	$\begin{matrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}$	μ'	$\begin{matrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{matrix}$	λ'	$\begin{matrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{matrix}$	μ
III	0 1 3′ 6	$\begin{matrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{matrix}$	μ'	$\begin{matrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{matrix}$	μ''	$\begin{matrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{matrix}$	λ''	$\begin{matrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{matrix}$	λ'

La première ligne contient les caractéristiques et les régulateurs des différentes faces du simplexe correspondant. La seconde ligne est composée de sommets qui définissent les simplexes contigus au simplexe correspondant par les faces dont les caractéristiques se trouvent au-dessus, dans la première ligne.

Les faces du parallèloèdre primitif R à trois dimensions (Fig. 2) se partagent en 8 hexagones de *Lejeune Dirichlet* et en 6 parallélogrammes.

Fig. 2.



Les faces hexagonales du parallèloèdre primitif R sont caractérisées par les numéros

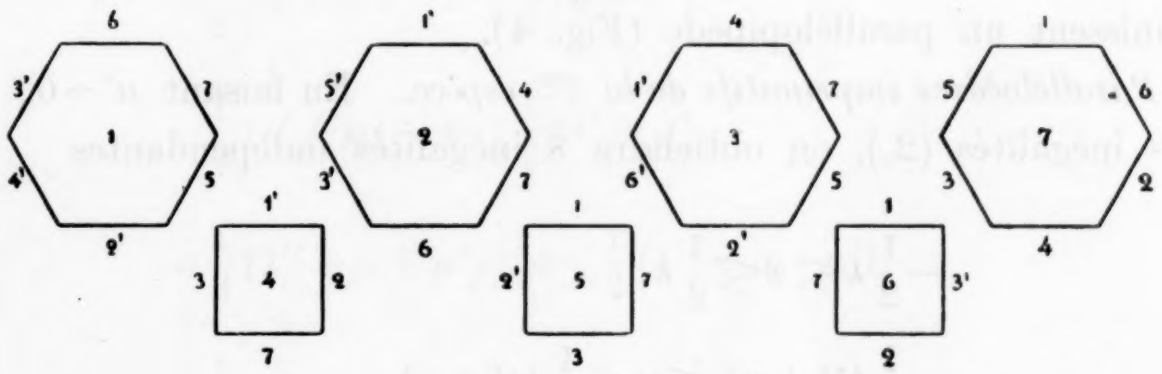
$$1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 1',\ 2',\ 3',\ 7'.$$

Les faces parallélogrammatiques sont caractérisées par les numéros

$$4,\ 5,\ 6,\ 4',\ 5',\ 6'.$$

Les faces, les arêtes et les sommets du parallèloèdre primitif R sont caractérisés schématiquement sur la Fig. 3.

Fig 3

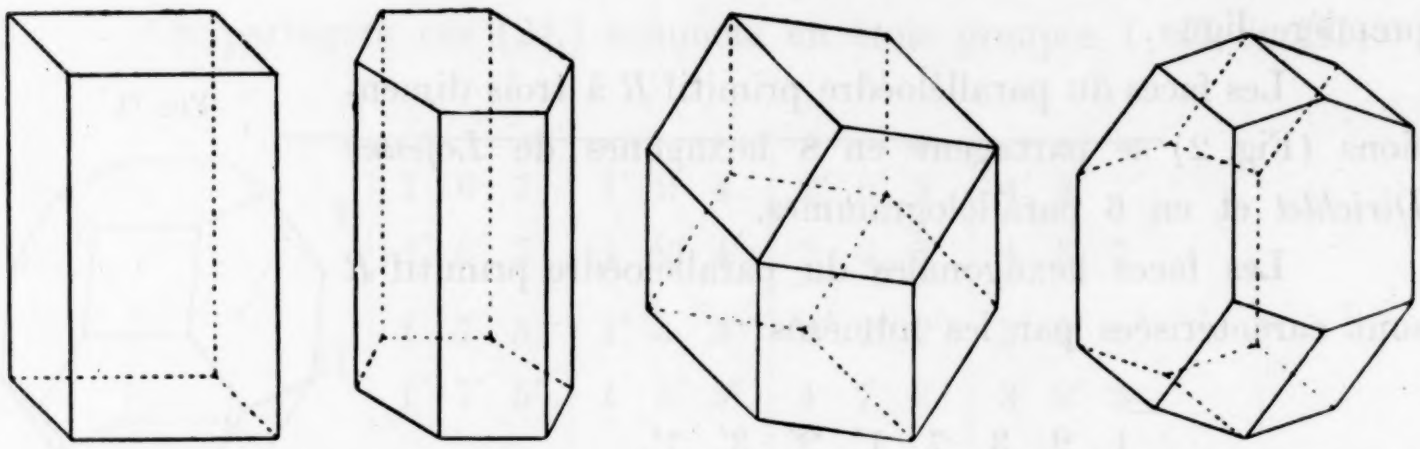


On a indiqué sur cette figure les numéros des faces qui sont contigus à une des 7 faces incongruentes. Chaque arête est caractérisée par deux numéros adjacents et chaque sommet par trois numéros.

113. En annulant un ou plusieurs paramètres λ, λ', λ'', μ, μ', μ'' dans les inégalités (2.), on déterminera les parallèloèdres imprimitifs à trois

dimensions. Il est aisé de voir que les parallélоèdres imprimitifs obtenus se partagent en quatre espèces différentes (Fig. 4—7).

Fig. 4. Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7.



Parallélоèdres imprimitifs de la 1re espèce. En faisant $\mu=0$, $\mu'=0$, $\mu''=0$ dans les inegalités (2.), on obtiendra 6 inégalités indépendantes

$$-\frac{1}{2}\lambda \leqq x \leqq \frac{1}{2}\lambda,$$

$$-\frac{1}{2}\lambda' \leqq y \leqq \frac{1}{2}\lambda',$$

$$-\frac{1}{2}\lambda'' \leqq z \leqq \frac{1}{2}\lambda''$$

qui définissent un parallélopipède (Fig. 4).

Parallélоèdres imprimitifs de la 2me espèce. En faisant $\mu'=0$, $\mu''=0$, dans les inégalités (2.), on obtiendra 8 inégalités indépendantes

$$-\frac{1}{2}\lambda \leqq x \leqq \frac{1}{2}\lambda,$$

$$-\frac{1}{2}(\lambda'+\mu) \leqq y \leqq \frac{1}{2}(\lambda'+\mu),$$

$$-\frac{1}{2}(\lambda''+\mu) \leqq z \leqq \frac{1}{2}(\lambda''+\mu),$$

$$-\frac{1}{2}(\lambda'+\lambda'') \leqq y+z \leqq \frac{1}{2}(\lambda'+\lambda'')$$

qui définissent un prisme à base hexagonale (Fig. 5).

Parallèloèdres imprimitifs de la 3me espèce. **En faisant $\lambda''=0$, $\mu''=0$ dans les inégalités (2.), on obtiendra 12 inégalités indépendantes**

$$-\frac{1}{2}(\lambda+\mu')\leqq x\leqq\frac{1}{2}(\lambda+\mu'),$$

$$-\frac{1}{2}(\lambda'+\mu)\leqq y\leqq\frac{1}{2}(\lambda'+\mu),$$

$$-\frac{1}{2}(\mu+\mu')\leqq z\leqq\frac{1}{2}(\mu+\mu'),$$

$$-\frac{1}{2}(\lambda'+\mu')\leqq y+z\leqq\frac{1}{2}(\lambda'+\mu'),$$

$$-\frac{1}{2}(\lambda+\mu)\leqq z+x\leqq\frac{1}{2}(\lambda+\mu),$$

$$-\frac{1}{2}(\lambda+\lambda')\leqq x+y+z\leqq\frac{1}{2}(\lambda+\lambda')$$

qui définissent un dodécaèdre parallélogrammatique (Fig. 6).

Parallèloèdres imprimitifs de la 4me espèce. **En faisant $\mu''=0$ dans les inégalités (2.), on obtient 12 inégalités indépendantes**

$$-\frac{1}{2}(\lambda+\mu')\leqq x\leqq\frac{1}{2}(\lambda+\mu'),$$

$$-\frac{1}{2}(\lambda'+\mu)\leqq y\leqq\frac{1}{2}(\lambda'+\mu),$$

$$-\frac{1}{2}(\lambda''+\mu+\mu')\leqq z\leqq\frac{1}{2}(\lambda''+\mu+\mu'),$$

$$-\frac{1}{2}(\lambda'+\lambda''+\mu')\leqq y+z\leqq\frac{1}{2}(\lambda'+\lambda''+\mu'),$$

$$-\frac{1}{2}(\lambda''+\lambda+\mu)\leqq z+x\leqq\frac{1}{2}(\lambda''+\lambda+\mu),$$

$$-\frac{1}{2}(\lambda+\lambda'+\lambda'')\leqq x+y+z\leqq\frac{1}{2}(\lambda+\lambda'+\lambda'')$$

qui définissent un dodécaèdre à 4 faces hexagonales et à 8 faces parallélogrammatiques (Fig. 7). M. *Fedorow* a démontré que d'autres parallélоèdres à trois dimensions n'existent pas*).

Parallélоèdres à quatre dimensions.

114. Le premier type de parallélоèdres primitifs à quatre dimensions est caractérisé par le domaine principal Δ des formes quadratiques quaternaires qui est déterminé par les inégalités indépendantes

$$\lambda_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} \geqq 0, \qquad \lambda_2 = a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} \geqq 0,$$

$$\lambda_3 = a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34} \geqq 0, \qquad \lambda_4 = a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{44} \geqq 0,$$

$$\mu_1 = -a_{12} \geqq 0, \quad \mu_2 = -a_{13} \geqq 0, \quad \mu_3 = -a_{14} \geqq 0,$$

$$\mu_4 = -a_{23} \geqq 0, \quad \mu_5 = -a_{24} \geqq 0, \quad \mu_6 = -a_{34} \geqq 0.$$

Chaque forme quadratique quaternaire

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

appartenant au domaine Δ peut être déterminée par les égalités

$$\begin{aligned}(1.) \qquad f(x_1, x_2, x_3, x_4) = {} & \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 \\ & + \mu_1 (x_1 - x_2)^2 + \mu_2 (x_1 - x_3)^2 + \mu_3 (x_1 - x_4)^2 \\ & + \mu_4 (x_2 - x_3)^2 + \mu_5 (x_2 - x_4)^2 + \mu_6 (x_3 - x_4)^2.\end{aligned}$$

Le parallélоèdre correspondant est déterminé par 30 inégalités qu'on mettra sous la forme

---

*) Voyez l'Introduction.

$$(2.)\qquad \pm(l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 + l_4 x_4) \leqq \frac{1}{2} f(l_1, l_2, l_3, l_4).$$

Les systèmes $\pm(l_1, l_2, l_3, l_4)$ et les valeurs correspondantes

$$f(l_1, l_2, l_3, l_4)$$

de la forme quadratique (1.) sont données dans la table suivante:

Ier type de paralléloèdres.

N	l_1	l_2	l_3	l_4	$f(l_1, l_2, l_3, l_4)$	$-l_1$	$-l_2$	$-l_3$	$-l_4$	N
1	1	0	0	0	$\lambda_1 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	-1	0	0	0	1′
2	0	1	0	0	$\lambda_2 + \mu_1 + \mu_4 + \mu_5$	0	-1	0	0	2′
3	0	0	1	0	$\lambda_3 + \mu_2 + \mu_4 + \mu_6$	0	0	-1	0	3′
4	0	0	0	1	$\lambda_4 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_6$	0	0	0	-1	4′
5	1	1	0	0	$\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5$	-1	-1	0	0	5′
6	1	0	1	0	$\lambda_1 + \lambda_3 + \mu_1 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_6$	-1	0	-1	0	6′
7	1	0	0	1	$\lambda_1 + \lambda_4 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_5 + \mu_6$	-1	0	0	-1	7′
8	0	1	1	0	$\lambda_2 + \lambda_3 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_5 + \mu_6$	0	-1	-1	0	8′
9	0	1	0	1	$\lambda_2 + \lambda_4 + \mu_1 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_6$	0	-1	0	-1	9′
10	0	0	1	1	$\lambda_3 + \lambda_4 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5$	0	0	-1	-1	10′
11	1	1	1	0	$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_6$	-1	-1	-1	0	11′
12	1	1	0	1	$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 + \mu_2 + \mu_4 + \mu_6$	-1	-1	0	-1	12′
13	1	0	1	1	$\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 + \mu_1 + \mu_4 + \mu_5$	-1	0	-1	-1	13′
14	0	1	1	1	$\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	0	-1	-1	-1	14′
15	1	1	1	1	$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$	-1	-1	-1	-1	15′

En attribuant aux paramètres

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \mu_6$$

les valeurs positives arbitraires, on déterminera à l'aide des inégalités (2.) tous les paralléloèdres primitifs du premier type.

Les paralléloèdres primitifs du premier type possèdent 120 sommets qui peuvent être partagés en 12 groupes composés des sommets congruents et des sommets opposés.

Tous ces sommets sont réunis dans la table suivante:

Sommets du paralléloèdre primitif de Ier type.

I	1 5 11 15	1′ 2 8 14	2′ 5′ 3 10	8′ 3′ 11′ 4	14′ 10′ 4′ 15′
	1′ 5′ 11′ 15′	1 2′ 8′ 14′	2 5 3′ 10′	8 3 11 4′	14 10 4 15
II	1 5 3′ 10′	1′ 2 6′ 13′	2′ 5′ 11′ 15′	6 11 3 4′	13 15 4 10
	1′ 5′ 3 10	1 2′ 6 13	2 5 11 15	6′ 11′ 3′ 4	13′ 15′ 4′ 10′
III	1 6 11 4′	1′ 3 8 7′	3′ 6′ 2 13′	8′ 2′ 11′ 15′	7 13 15 4
	1′ 6′ 11′ 4	1 3′ 8′ 7	3 6 2′ 13	8 2 11 15	7′ 13′ 15′ 4′
IV	1 7 13 15	1′ 4 10 14	4′ 7′ 3 8	10′ 3′ 13′ 2	14′ 8′ 2′ 15′
	1′ 7′ 13′ 15′	1 4′ 10′ 14′	4 7 3′ 8′	10 3 13 2′	14 8 2 15
V	1 5 12 15	1′ 2 9 14	2′ 5′ 4 10	9′ 4′ 12′ 3	14′ 10′ 3′ 15′
	1′ 5′ 12′ 15′	1 2′ 9′ 14′	2 5 4′ 10′	9 4 12 3′	14 10 3 15
VI	1 5 4′ 10′	1′ 2 7′ 13′	2′ 5′ 12′ 15′	7 12 4 3′	13 15 3 10
	1′ 5′ 4 10	1 2′ 7 13	2 5 12 15	7′ 12′ 4′ 3	13′ 15′ 3′ 10′
VII	1 7 12 3′	1′ 4 9 6′	4′ 7′ 2 13′	9′ 2′ 12′ 15′	6 13 15 3
	1′ 7′ 12′ 3	1 4′ 9′ 6	4 7 2′ 13	9 2 12 15	6′ 13′ 15′ 3′
VIII	1 6 13 15	1′ 3 10 14	3′ 6′ 4 9	10′ 4′ 13′ 2	14′ 9′ 2′ 15′
	1′ 6′ 13′ 15′	1 3′ 10′ 14′	3 6 4′ 9′	10 4 13 2′	14 9 2 15
IX	1 5 11 4′	1′ 2 8 7′	2′ 5′ 3 12′	8′ 3′ 11′ 15′	7 12 15 4
	1′ 5′ 11′ 4	1 2′ 8′ 7	2 5 3′ 12	8 3 11 15	7′ 12′ 15′ 4′
X	1 5 12 3′	1′ 2 9 6′	2′ 5′ 4 11′	9′ 4′ 12′ 15′	6 11 15 3
	1′ 5′ 12′ 3	1 2′ 9′ 6	2 5 4′ 11	9 4 12 15	6′ 11′ 15′ 3′
XI	1 6 11 15	1′ 3 8 14	3′ 6′ 2 9	8′ 2′ 11′ 4	14′ 9′ 4′ 15′
	1′ 6′ 11′ 15′	1 3′ 8′ 14′	3 6 2′ 9′	8 2 11 4′	14 9 4 15
XII	1 7 12 15	1′ 4 9 14	4′ 7′ 2 8	9′ 2′ 12′ 3	14′ 8′ 3′ 15′
	1′ 7′ 12′ 15′	1 4′ 9′ 14′	4 7 2′ 8′	9 2 12 3′	14 8 3 15

Régulateurs et caractéristiques correspondant au Ier type de parallélòèdres.

I	0 1 5 11 15	−1 0 0 0	λ_1	1 −1 0 0	0 1 −1 0	0 0 1 −1	0 0 0 1
		2 1 1 1		(2) μ_1	(6) μ_4	(12) μ_6	(4′) λ_4
II	0 1 5 3′ 10′	−1 0 1 0	μ_2	1 −1 0 0	0 1 0 0	0 0 −1 1	0 0 0 1
		1 0 −1 0		(2) μ_1	(14′) λ_2	(4′) μ_6	(12) λ_4
III	0 1 6 11 4′	−1 0 0 1	μ_3	1 0 −1 0	0 −1 1 0	0 1 0 0	0 0 0 −1
		1 0 0 −1		(3) μ_2	(5) μ_4	(9′) λ_2	(15) λ_4
IV	0 1 7 13 15	−1 0 0 0	λ_1	1 0 0 −1	0 0 −1 1	0 −1 1 0	0 1 0 0
		2 1 1 1		(4) μ_3	(6) μ_6	(12) μ_4	(2′) λ_2
V	0 1 5 12 15	−1 0 0 0	λ_1	1 −1 0 0	0 1 0 −1	0 0 −1 1	0 0 1 0
		2 1 1 1		(2) μ_1	(7) μ_5	(11) μ_6	(3′) λ_3
VI	0 1 5 4′ 10′	−1 0 0 1	μ_3	1 −1 0 0	0 1 0 0	0 0 1 −1	0 0 −1 0
		1 0 0 −1		(2) μ_1	(14′) λ_2	(3′) μ_6	(11) λ_3
VII	0 1 7 12 3′	−1 0 1 0	μ_2	1 0 0 −1	0 −1 0 1	0 1 0 0	0 0 −1 0
		1 0 −1 0		(4) μ_3	(5) μ_5	(8′) λ_2	(15) λ_3
VIII	0 1 6 13 15	−1 0 0 0	λ_1	1 0 −1 0	0 0 1 −1	0 −1 0 1	0 1 0 0
		2 1 1 1		(3) μ_2	(7) μ_6	(11) μ_5	(2′) λ_2
IX	0 1 5 11 4′	−1 0 0 1	μ_3	1 −1 0 0	0 1 −1 0	0 0 1 0	0 0 0 −1
		1 0 0 −1		(2) μ_1	(6) μ_4	(10′) λ_3	(15) λ_4
X	0 1 5 12 3′	−1 0 1 0	μ_2	1 −1 0 0	0 1 0 −1	0 0 0 1	0 0 −1 0
		1 0 −1 0		(2) μ_1	(7) μ_5	(10′) λ_4	(15) λ_3
XI	0 1 6 11 15	−1 0 0 0	λ_1	1 0 −1 0	0 −1 1 0	0 1 0 −1	0 0 0 1
		2 1 1 1		(3) μ_2	(5) μ_4	(13) μ_5	(4′) λ_4
XII	0 1 7 12 15	−1 0 0 0	λ_1	1 0 0 −1	0 −1 0 1	0 1 −1 0	0 0 1 0
		2 1 1 1		(4) μ_3	(5) μ_5	(13) μ_4	(3′) λ_3

Dans cette table, la première ligne de chaque groupe contient les caractéristiques des faces à trois dimensions correspondant aux simplexes I, II, ... XII.

La seconde ligne renferme les sommets des simplexes qui sont contigus aux simplexes I, II, ... XII par les faces dont les caractéristiques sont indiquées au-dessus, dans la première ligne, et les régulateurs sont indiqués à côté, dans la seconde ligne.

115. Examinons les parallélòèdres à quatre dimensions qui appartiennent au deuxième type des parallélòèdres primitifs défini par le domaine Δ' de formes quadratiques quaternaires. Le domaine Δ' est contigu au domaine principal Δ par la face à 9 dimensions définie par l'équation

$$\mu_1 = 0.$$

Le régulateur indépendant μ_1 correspond aux faces des simplexes

$$\text{I, II, V, VI, IX, X.}$$

Tous ces simplexes doivent être reconstruits à l'aide de l'algorithme exposé au n° 91.

On déterminera les nombres $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ d'après les conditions

$$(2) = \vartheta_1(1) + \vartheta_2(5) + \vartheta_3(11) + \vartheta_4(15) \text{ et } \vartheta_0 + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 = 1;$$

il vient

$$\vartheta_0 = 1, \vartheta_1 = -1, \vartheta_2 = 1, \vartheta_3 = 0, \vartheta_4 = 0.$$

Il s'ensuit qu'on remplacera les trois paires de simplexes

$$(0,1,5,11,15) \text{ et } (0,2,5,11,15), \quad (0,1,5,12,15) \text{ et } (0,2,5,12,15),$$
$$(0,1,5,11,4') \text{ et } (0,2,5,11,4')$$

par les simplexes

$$(3.) \quad (2,1,5,11,15) \text{ et } (0,1,2,11,15), \ (2,1,5,12,15) \text{ et } (0,1,2,12,15),$$
$$(2,1,5,11,4') \text{ et } (0,1,2,11,4').$$

En désignant le système $(1,-1,0,0)$ par le symbole (5.) et le système $(-1,1,0,0)$ par le symbole (5'), on désignera

$$\text{I}-(0,5,1,6,13), \ \text{II}-(0,1,2,11,15), \ \text{V}-(0,5,1,7,13),$$
$$\text{VI}-(0,1,2,12,15), \ \text{IX}-(0,5,1,6,9'), \ \text{X}-(0,1,2,11,4').$$

Ces simplexes sont congruents aux simplexes nouveaux (3.).

Les parallélòèdres primitifs du IIe type possèdent 120 sommets qui sont réunis dans la table suivante:

Sommets du parallélòèdre primitif de IIe type.

I	1	5	6	13	1′	2′	3	10	2	5′	8	14	3′	8′	6′	4	10′	14′	4′	13′
	1′	5′	6′	13′	1	2	3′	10′	2′	5	8′	14′	3	8	6	4′	10	14	4	13
II	1	2	11	15	1′	5′	8	14	5	2′	6	13	8′	6′	11′	4	14′	13′	4′	15′
	1′	2′	11′	15′	1	5	8′	14′	5′	2	6′	13′	8	6	11	4′	14	13	4	15
III	1	6	11	4′	1′	3	8	7′	3′	6′	2	13′	8′	2′	11′	15′	7	13	15	4
	1′	6′	11′	4	1	3′	8′	7	3	6	2′	13	8	2	11	15	7′	13′	15′	4′
IV	1	7	13	15	1′	4	10	14	4′	7′	3	8	10′	3′	13′	2	14′	8′	2′	15′
	1′	7′	13′	15′	1	4′	10′	14′	4	7	3′	8′	10	3	13	2′	14	8	2	15
V	1	5	7	13	1′	2′	4	10	2	5′	9	14	4′	9′	7′	3	10′	14′	3′	13′
	1′	5′	7′	13′	1	2	4′	10′	2′	5	9′	14′	4	9	7	3′	10	14	3	13
VI	1	2	12	15	1′	5′	9	14	5	2′	7	13	9′	7′	12′	3	14′	13′	3′	15′
	1′	2′	12′	15′	1	5	9′	14′	5′	2	7′	13′	9	7	12	3′	14	13	3	15
VII	1	7	12	3′	1′	4	9	6′	4′	7′	2	13′	9′	2′	12′	15′	6	13	15	3
	1′	7′	12′	3	1	4′	9′	6	4	7	2′	13	9	2	12	15	6′	13′	15′	3′
VIII	1	6	13	15	1′	3	10	14	3′	6′	4	9	10′	4′	13′	2	14′	9′	2′	15′
	1′	6′	13′	15′	1	3′	10′	14′	3	6	4′	9′	10	4	13	2′	14	9	2	15
IX	1	5	6	9′	1′	2′	3	12′	2	5′	8	7′	3′	8′	6′	15′	12	7	15	9
	1′	5′	6′	9	1	2	3′	12	2′	5	8′	7	3	8	6	15	12′	7′	15′	9′
X	1	2	11	4′	1′	5′	8	7′	5	2′	6	9′	8′	6′	11′	15′	7	9	15	4
	1′	2′	11′	4	1	5	8′	7	5′	2	6′	9	8	6	11	15	7′	9′	15′	4′
XI	1	6	11	15	1′	3	8	14	3′	6′	2	9	8′	2′	11′	4	14′	9′	4′	15′
	1′	6′	11′	15′	1	3′	8′	14′	3	6	2′	9′	8	2	11	4′	14	9	4	15
XII	1	7	12	15	1′	4	9	14	4′	7′	2	8	9′	2′	12′	3	14′	8′	3′	15′
	1′	7′	12′	15′	1	4′	9′	14′	4	7	2′	8′	9	2	12	3′	14	8	3	15

Régulateurs et caractéristiques correspondant au IIe type de paralléloèdres.

I	0 1 5 6 13	−1 0 0 0 2 0 1 1	λ_1	1 1 −1 0 (2′) μ_1	0 −1 0 0 (15) λ_2	0 0 1 −1 (7) μ_6	0 0 0 1 (9′) $\lambda_4+\mu_1$
II	0 1 2 11 15	−1 −1 1 0 1 1 0 0	μ_1	1 0 −1 0 (8) μ_2	0 1 −1 0 (6) μ_4	0 0 1 −1 (12) $\mu_6+\mu_1$	0 0 0 1 (4′) λ_4
III	0 1 6 11 4′	−1 0 0 1 1 0 0 −1	$\mu_3+\mu_1$	1 0 −1 0 (8) μ_2	0 −1 1 0 (2) μ_4	0 1 0 0 (9′) $\lambda_2+\mu_1$	0 0 0 −1 (15) λ_4
IV	0 1 7 13 15	−1 0 0 0 2 0 1 1	λ_1	1 0 0 −1 (4) $\mu_3+\mu_1$	0 0 −1 1 (6) μ_6	0 −1 1 0 (12) $\mu_4+\mu_1$	0 1 0 0 (5) λ_2
V	0 1 5 7 13	−1 0 0 0 2 0 1 1	λ_1	1 1 0 −1 (2′) μ_1	0 −1 0 0 (15) λ_2	0 0 −1 1 (6) μ_6	0 0 1 0 (8′) $\lambda_3+\mu_1$
VI	0 1 2 12 15	−1 −1 0 1 1 1 0 0	μ_1	1 0 0 −1 (9) μ_3	0 1 0 −1 (7) μ_5	0 0 −1 1 (11) $\mu_6+\mu_1$	0 0 1 0 (3′) λ_3
VII	0 1 7 12 3′	−1 0 1 0 1 0 −1 0	$\mu_2+\mu_1$	1 0 0 −1 (9) μ_3	0 −1 0 1 (2) μ_5	0 1 0 0 (8′) $\lambda_2+\mu_1$	0 0 −1 0 (15) λ_3
VIII	0 1 6 13 15	−1 0 0 0 2 0 1 1	λ_1	1 0 −1 0 (3) $\mu_2+\mu_1$	0 0 1 −1 (7) μ_6	0 −1 0 1 (11) $\mu_5+\mu_1$	0 1 0 0 (5) λ_2
IX	0 1 5 6 9′	−1 0 0 1 1 −1 0 −1	μ_3	1 1 −1 −1 (2′) μ_1	0 −1 0 1 (4′) μ_5	0 0 1 0 (14′) λ_3	0 0 0 −1 (13) $\lambda_4+\mu_1$
X	0 1 2 11 4′	−1 −1 1 1 1 1 0 0	μ_1	1 0 −1 0 (8) μ_2	0 1 −1 0 (6) μ_4	0 0 1 0 (10′) $\lambda_3+\mu_1$	0 0 0 −1 (15) λ_4
XI	0 1 6 11 15	−1 0 0 0 2 1 1 1	$\lambda_1+\mu_1$	1 0 −1 0 (8) μ_2	0 −1 1 0 (2) μ_4	0 1 0 −1 (13) $\mu_5+\mu_1$	0 0 0 1 (4′) λ_4
XII	0 1 7 12 15	−1 0 0 0 2 1 1 1	$\lambda_1+\mu_1$	1 0 0 −1 (9) μ_3	0 −1 0 1 (2) μ_5	0 1 −1 0 (13) $\mu_4+\mu_1$	0 0 1 0 (3′) λ_3

Les régulateurs indépendants s'expriment par les formules

$$\lambda_1 = a_{11} + a_{13} + a_{14}, \quad \lambda_2 = a_{22} + a_{23} + a_{24},$$
$$\lambda_3 = a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34}, \quad \lambda_4 = a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{44},$$

$$\mu_1 = a_{12},\ \mu_2 = -a_{13}-a_{12},\ \mu_3 = -a_{14}-a_{12},\ \mu_4 = -a_{23}-a_{12},$$
$$\mu_5 = -a_{24}-a_{12},\ \mu_6 = -a_{34}.$$

Le domaine Δ' des formes quadratiques quaternaires qui définit le deuxième type de parallèloèdres primitifs à quatre dimensions est déterminé par 10 inégalités indépendantes

$$\lambda_1 \geqq 0,\ \lambda_2 \geqq 0,\ \lambda_3 \geqq 0,\ \lambda_4 \geqq 0,\ \mu_1 \geqq 0,\ \mu_2 \geqq 0,\ \mu_3 \geqq 0,\ \mu_4 \geqq 0,\ \mu_5 \geqq 0,\ \mu_6 \geqq 0.$$

Chaque forme quadratique quaternaire appartenant au domaine Δ' peut s'écrire

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + \mu_1 \omega + \mu_2 (x_1 - x_3)^2 + \mu_3 (x_1 - x_4)^2 + \mu_4 (x_2 - x_3)^2 + \mu_5 (x_2 - x_4)^2 + \mu_6 (x_3 - x_4)^2$$

où

$$(4.)\quad \omega = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_4^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4.$$

Les parallèloèdres appartenant au IIe type sont déterminés par 30 inégalités de forme (2.) qui sont présentées symboliquement dans la table suivante:

IIe type de parallèloèdres.

N	l_1	l_2	l_3	l_4	$f(l_1, l_2, l_3, l_4)$	$-l_1$	$-l_2$	$-l_3$	$-l_4$	N
1	1	0	0	0	$\lambda_1 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	−1	0	0	0	1′
2	0	1	0	0	$\lambda_2 + 2\mu_1 + \mu_4 + \mu_5$	0	−1	0	0	2′
3	0	0	1	0	$\lambda_3 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_4 + \mu_6$	0	0	−1	0	3′
4	0	0	0	1	$\lambda_4 + 2\mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_6$	0	0	0	−1	4′
5	1	−1	0	0	$\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5$	−1	1	0	0	5′
6	1	0	1	0	$\lambda_1 + \lambda_3 + 2\mu_1 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_6$	−1	0	−1	0	6′
7	1	0	0	1	$\lambda_1 + \lambda_4 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_5 + \mu_6$	−1	0	0	−1	7′
8	0	1	1	0	$\lambda_2 + \lambda_3 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_5 + \mu_6$	0	−1	−1	0	8′
9	0	1	0	1	$\lambda_2 + \lambda_4 + 2\mu_1 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_6$	0	−1	0	−1	9′
10	0	0	1	1	$\lambda_3 + \lambda_4 + 4\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5$	0	0	−1	−1	10′
11	1	1	1	0	$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 4\mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_6$	−1	−1	−1	0	11′
12	1	1	0	1	$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 + 4\mu_1 + \mu_2 + \mu_4 + \mu_6$	−1	−1	0	−1	12′
13	1	0	1	1	$\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 + 2\mu_1 + \mu_4 + \mu_5$	−1	0	−1	−1	13′
14	0	1	1	1	$\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3$	0	−1	−1	−1	14′
15	1	1	1	1	$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + 2\mu_1$	−1	−1	−1	−1	15′

116. Cherchons le domaine Δ'' de formes quadratiques quaternaires qui est contigu au domaine Δ' par la face à 9 dimensions definie par l'équation

$$\mu_6 = 0.$$

Le régulateur indépendant μ_6 correspond aux faces des simplexes

I, IV, V, VIII.

Tous ces simplexes doivent être reconstruits d'après l'algorithme exposé au n° 91. On déterminera, à cet effet, les nombres

$$\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$$

d'après les conditions

$$(5) = \vartheta_1(1) + \vartheta_2(5) + \vartheta_3(6) + \vartheta_4(13) \text{ et } \vartheta_0 + \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 = 1;$$

il vient

$$\vartheta_0 = 0,\ \vartheta_1 = 1,\ \vartheta_2 = 0,\ \vartheta_3 = -1,\ \vartheta_4 = 1.$$

On en conclut que les deux paires de simplexes

$$(0, 1, 5, 6, 13) \text{ et } (0, 1, 5, 7, 13), \qquad (0, 1, 7, 13, 15) \text{ et } (0, 1, 6, 13, 15)$$

doivent être remplacées par les simplexes nouveaux

$$\text{I}-(0, 7, 5, 6, 13) \text{ et } \text{V}-(0, 1, 5, 6, 7),$$
$$\text{IV}-(0, 6, 7, 13, 15) \text{ et } \text{VIII}-(0, 1, 7, 6, 15).$$

En désignant le système $(0, 0, 1, -1)$ par le symbole (10) et le système $(0, 0, -1, 1)$ par le symbole (10′) on déterminera tous les

sommets des parallélоèdres primitifs appartenant au nouveau type comme il suit.

Sommets du parallélоèdre primitif de IIIe type.

I	7 5 6 13	7′ 9′ 10 3	9 5′ 8 14	10′ 8′ 6′ 4	3′ 14′ 4′ 13′
	7′ 5′ 6′ 13′	7 9 10′ 3′	9′ 5 8′ 14′	10 8 6 4′	3 14 4 13
II	1 2 11 15	1′ 5′ 8 14	5 2′ 6 13	8′ 6′ 11′ 4	14′ 13′ 4′ 15′
	1′ 2′ 11′ 15′	1 5 8′ 14′	5′ 2 6′ 13′	8 6 11 4′	14 13 4 15
III	1 6 11 4′	1′ 3 8 7′	3′ 6′ 2 13′	8′ 2′ 11′ 15′	7 13 15 4
	1′ 6′ 11′ 4	1 3′ 8′ 7	3 6 2′ 13	8 2 11 15	7′ 13′ 15′ 4′
IV	6 7 13 15	6′ 10′ 4 9	10 7′ 3 8	4′ 3′ 13′ 2	9′ 8′ 2′ 15′
	6′ 7′ 13′ 15′	6 10 4′ 9′	10′ 7 3′ 8′	4 3 13 2′	9 8 2 15
V	1 5 6 7	1′ 2′ 3 4	2 5′ 8 9	3′ 8′ 6′ 10′	4′ 9′ 10 7′
	1′ 5′ 6′ 7′	1 2 3′ 4′	2′ 5 8′ 9′	3 8 6 10	4 9 10′ 7
VI	1 2 12 15	1′ 5′ 9 14	5 2′ 7 13	9′ 7′ 12′ 3	14′ 13′ 3′ 15′
	1′ 2′ 12′ 15′	1 5 9′ 14′	5′ 2 7′ 13′	9 7 12 3′	14 13 3 15
VII	1 7 12 3′	1′ 4 9 6′	4′ 7′ 2 13′	9′ 2′ 12′ 15′	6 13 15 3
	1′ 7′ 12′ 3	1 4′ 9′ 6	4 7 2′ 13	9 2 12 15	6′ 13′ 15′ 3′
VIII	1 7 6 15	1′ 4 3 14	4′ 7′ 10 8	3′ 10′ 6′ 9	14′ 8′ 9′ 15′
	1′ 7′ 6′ 15′	1 4′ 3′ 14′	4 7 10′ 8′	3 10 6 9′	14 8 9 15
IX	1 5 6 9′	1′ 2′ 3 12′	2 5′ 8 7′	3′ 8′ 6′ 15′	12 7 15 9
	1′ 5′ 6′ 9	1 2 3′ 12	2′ 5 8′ 7	3 8 6 15	12′ 7′ 15′ 9′
X	1 2 11 4′	1′ 5′ 8 7′	5 2′ 6 9′	8′ 6′ 11′ 15′	7 9 15 4
	1′ 2′ 11′ 4	1 5 8′ 7	5′ 2 6′ 9	8 6 11 15	7′ 9′ 15′ 4′
XI	1 6 11 15	1′ 3 8 14	3′ 6′ 2 9	8′ 2′ 11′ 4	14′ 9′ 4′ 15′
	1′ 6′ 11′ 15′	1 3′ 8′ 14′	3 6 2′ 9′	8 2 11 4′	14 9 4 15
XII	1 7 12 15	1′ 4 9 14	4′ 7′ 2 8	9′ 2′ 12′ 3	14′ 8′ 3′ 15′
	1′ 7′ 12′ 15′	1 4′ 9′ 14′	4 7 2′ 8′	9 2 12 3′	14 8 3 15

Régulateurs et caractéristiques correspondant au IIIe type de parallélòèdres.

I	0 7 5 6 13	−1	0	0	0	λ_1	1	1	−1	0	0	−1	0	0	1	1	0	−1	−1	−1	1	1
		2	0	1	1		(2′)		μ_1		(15)		λ_2		(2′)		μ_1		(1)		μ_6	
II	0 1 2 11 15	−1	−1	1	0	μ_1	1	0	−1	0	0	1	−1	0	0	0	1	−1	0	0	0	1
		1	1	0	1		(8)		μ_2		(6)		μ_4		(12)		μ_1		(4′)		λ_4	
III	0 1 6 11 4′	−1	0	0	1	$\mu_3+\mu_1$	1	0	−1	0	0	−1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	−1
		1	0	1	−1		(8)		μ_2		(2)		μ_4		(9′)		$\lambda_2+\mu_1$		(15)		λ_4	
IV	0 6 7 13 15	−1	0	0	0	λ_1	1	0	0	−1	1	0	−1	0	−1	−1	1	1	0	1	0	0
		2	0	1	1		(4)		$\mu_3+\mu_1$		(3)		$\mu_2+\mu_1$		(1)		μ_6		(5)		λ_2	
V	0 1 5 6 7	−1	0	0	0	λ_1	1	1	−1	−1	0	−1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
		2	0	1	1		(13)		μ_6		(15)		λ_2		(8′)		$\lambda_3+\mu_1$		(9′)		$\lambda_4+\mu_1$	
VI	0 1 2 12 15	−1	−1	0	1	μ_1	1	0	0	−1	1	1	0	−1	0	0	−1	1	0	0	1	0
		1	1	1	0		(9)		μ_3		(7)		μ_5		(11)		μ_1		(3′)		λ_3	
VII	0 1 7 12 3′	−1	0	1	0	$\mu_2+\mu_1$	1	0	0	−1	0	−1	0	1	0	1	0	0	0	0	−1	0
		1	0	−1	1		(9)		μ_3		(2)		μ_5		(8′)		$\lambda_2+\mu_1$		(15)		λ_3	
VIII	0 1 7 6 15	−1	0	0	0	λ_1	1	1	−1	−1	0	−1	0	1	0	−1	1	0	0	1	0	0
		2	0	1	1		(13)		μ_6		(11)		$\mu_5+\mu_1$		(12)		$\mu_4+\mu_1$		(5)		λ_2	
IX	0 1 5 6 9′	−1	0	0	1	μ_3	1	1	−1	−1	0	−1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	−1
		1	−1	0	−1		(2′)		$\mu_1+\mu_6$		(4′)		μ_5		(14′)		λ_3		(7)		$\lambda_4+\mu_1$	
X	0 1 2 11 4′	−1	−1	1	1	$\mu_1+\mu_6$	1	0	−1	0	0	1	−1	0	0	0	1	0	0	0	0	−1
		1	1	0	0		(8)		μ_2		(6)		μ_4		(3′)		$\lambda_3+\mu_1$		(15)		λ_4	
XI	0 1 6 11 15	−1	0	0	0	$\lambda_1+\mu_1$	1	0	−1	0	0	−1	1	0	0	1	0	−1	0	0	0	1
		2	1	1	1		(8)		μ_2		(2)		μ_4		(7)		$\mu_5+\mu_1$		(4′)		λ_4	
XII	0 1 7 12 15	−1	0	0	0	$\lambda_1+\mu_1$	1	0	0	−1	0	−1	0	1	0	1	−1	0	0	0	1	0
		2	1	1	1		(9)		μ_3		(2)		μ_5		(6)		$\mu_4+\mu_1$		(3′)		λ_3	

Les régulateurs indépendants s'expriment par les formules

$$\lambda_1 = a_{11} + a_{13} + a_{14} + a_{34},\ \lambda_2 = a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{34},$$

$$\lambda_3 = a_{31} + a_{32} + a_{33} + a_{34},\ \lambda_4 = a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{44},$$

$$\mu_1 = a_{12} - a_{34},\ \mu_2 = -a_{13} - a_{12},\ \mu_3 = -a_{14} - a_{12},$$
$$\mu_4 = -a_{23} - a_{12},\ \mu_5 = -a_{24} - a_{12},\ \mu_6 = a_{34}.$$

Le domaine Δ'' de formes quadratiques quaternaires qui définit le troisième type de paralléloèdres primitifs à quatre dimensions est déterminé par 10 inégalités indépendantes

$$\lambda_1 \geqq 0,\ \lambda_2 \geqq 0,\ \lambda_3 \geqq 0,\ \lambda_4 \geqq 0,\ \mu_1 \geqq 0,\ \mu_2 \geqq 0,\ \mu_3 \geqq 0,\ \mu_4 \geqq 0,\ \mu_5 \geqq 0,\ \mu_6 \geqq 0.$$

Chaque forme quadratique quaternaire appartenant au domaine Δ'' peut s'écrire

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + \mu_1 \omega + \mu_2 (x_1 - x_3)^2$$
$$+ \mu_3 (x_1 - x_4)^2 + \mu_4 (x_2 - x_3)^2 + \mu_5 (x_2 - x_4)^2 + \mu_6 (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2,$$

la forme ω étant définie par l'égalité (4.). Les paralléloèdres appartenant au IIIe type sont déterminés par 30 inégalités de forme (2.) qui sont présentées symboliquement dans la table suivante:

IIIe type de paralléloèdres.

N	l_1	l_2	l_3	l_4	$f(l_1, l_2, l_3, l_4)$	$-l_1$	$-l_2$	$-l_3$	$-l_4$	N
1	1	0	0	0	$\lambda_1 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_6$	−1	0	0	0	1′
2	0	1	0	0	$\lambda_2 + 2\mu_1 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_6$	0	−1	0	0	2′
3	0	0	1	0	$\lambda_3 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_4 + \mu_6$	0	0	−1	0	3′
4	0	0	0	1	$\lambda_4 + 2\mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_6$	0	0	0	−1	4′
5	1	−1	0	0	$\lambda_1 + \lambda_2 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5$	−1	1	0	0	5′
6	1	0	1	0	$\lambda_1 + \lambda_3 + 2\mu_1 + \mu_3 + \mu_4$	−1	0	−1	0	6′
7	1	0	0	1	$\lambda_1 + \lambda_4 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_5$	−1	0	0	−1	7′
8	0	1	1	0	$\lambda_2 + \lambda_3 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_5$	0	−1	−1	0	8′
9	0	1	0	1	$\lambda_2 + \lambda_4 + 2\mu_1 + \mu_3 + \mu_4$	0	−1	0	−1	9′
10	0	0	1	−1	$\lambda_3 + \lambda_4 + 4\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5$	0	0	−1	1	10′
11	1	1	1	0	$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 4\mu_1 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_6$	−1	−1	−1	0	11′
12	1	1	0	1	$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_4 + 4\mu_1 + \mu_2 + \mu_4 + \mu_6$	−1	−1	0	−1	12′
13	1	0	1	1	$\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 + 2\mu_1 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_6$	−1	0	−1	−1	13′
14	0	1	1	1	$\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + 2\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_6$	0	−1	−1	−1	14′
I5	1	1	1	1	$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + 2\mu_1$	−1	−1	−1	−1	15′

117. Nous avons déterminé trois domaines $\Delta, \Delta', \Delta''$ qui caractérisent trois types de paralléloèdres primitifs à quatre dimensions.

Théorème. L'ensemble (Δ) *des domaines de formes quadratiques quaternaires est composé de trois classes différentes qui peuvent être représentées par les domaines* Δ, Δ' *et* Δ''.

Dans mon premier mémoire cité, il a été démontré que l'ensemble (R) des domaines de formes quadratiques quaternaires correspondant aux formes quadratiques quaternaires parfaites est composé de deux classes réprésentées par le domaine principal R et par un domaine R_1 déterminé par les égalités

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = {} & \varrho_1 x_1^2 + \varrho_2 x_2^2 + \varrho_3 x_3^2 + \varrho_4 x_4^2 + \varrho_5 (x_1 - x_3)^2 + \varrho_6 (x_1 - x_4)^2 \\ & + \varrho_7 (x_2 - x_3)^2 + \varrho_8 (x_2 - x_4)^2 + \varrho_9 (x_3 - x_4)^2 \\ & + \varrho_{10} (x_1 + x_2 - x_3)^2 + \varrho_{11} (x_1 + x_2 - x_4)^2 + \varrho_{12} (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 \end{aligned}$$

où $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_{12}$ sont des paramètres arbitraires positifs ou nuls.

Le domaine R_1 correspond à une forme parfaite

$$(5.) \qquad \varphi_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 .$$

Dans le mémoire cité, il a été démontré que toutes les faces à 9 dimensions du domaine R_1 sont équivalentes à deux faces caractérisées: l'une, par les formes quadratiques

$$x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, (x_1 - x_3)^2, (x_1 - x_4)^2, (x_2 - x_3)^2, (x_2 - x_4)^2, (x_3 - x_4)^2$$

et l'autre, par les formes quadratiques

$$x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, (x_1 - x_3)^2, (x_1 - x_4)^2, (x_2 - x_3)^2, (x_2 - x_4)^2, (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2 .$$

La première face vérifie l'équation

$$a_{12} = 0$$

et la seconde face vérifie l'équation

$$a_{12}-a_{34}=0.$$

La forme ω déterminée par la formule (4.) caractérise l'axe du domaine R_1 qui ne change pas quand on transforme le domaine R_1 en soi-même.

On en conclut que le domaine R_1 peut être partagé en parties qui toutes sont équivalentes aux deux domaines obtenus Δ' et Δ''. Il en résulte que le domaine principal Δ et les deux domaines Δ' et Δ'' ne peuvent être équivalents.

Le théorème énoncé est donc démontré.

En ne considérant pas comme différents les types équivalents de paralléloèdres on peut dire qu'il n'existe que trois types différents de paralléloèdres primitifs dans l'espace à quatre dimensions.

En appelant réduites les formes quadratiques positives qui appartiennent aux domaines Δ, Δ' et Δ'', on obtient une nouvelle méthode de réduction des formes quadratiques positives quaternaires qui présente une modification de la méthode due à M. *Charve**).

En effet, d'après la méthode de M. *Charve*, on appelle réduites les formes quadratiques positives quaternaires appartenant à un des trois domaines simples R, R' et R''. Les deux premiers domaines R et R' coïncident avec les domaines Δ et Δ' et ce n'est que le troisième domaine R'' de M. *Charve* qui diffère du domaine Δ''. Chaque forme appartenant au domaine Δ'' est équivalente à une forme appartenant au domaine R'' et vice-versa.

118. En examinant les deux tables qui renferment les caractéristiques des faces des simplexes qui définissent le IIe et le IIIe type de paralléloèdres primitifs, on observera que ces caractéristiques coïncident pour les deux types et sont représentées par les formes lineaires

$$\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3, \pm x_4, \pm(x_1-x_3), \pm(x_1-x_4), \pm(x_2-x_3), \pm(x_2-x_4),$$

$$\pm(x_3-x_4), \pm(x_1+x_2-x_3), \pm(x_1+x_2-x_4), \pm(x_1+x_2-x_3-x_4).$$

---

*) Voyez l'Introduction.

Il est remarquable que ces formes linéaires définissent l'ensemble des représentations du minimum de la forme parfaite φ_1 déterminée par l'égalité (5.).

En vertu de ce qui a été dit précédemment, on peut affirmer que la coïncidence signalée se manifeste pour les caractéristiques des faces de tous les paralléloèdres primitifs à 2, 3 et 4 dimensions.

Il serait intéressant de reconnaître, si cette coïncidence n'est qu'un fait du hasard ou s'il existe réellement une relation entre les deux problèmes qui semblent être si différents: entre le problème de la partition uniforme de l'espace à l'aide des polyèdres convexes congruents et la recherche des formes quadratiques positives parfaites.

Fin du deuxième mémoire.

Unmittelbar nachdem der erste Bogen dieser bedeutenden Arbeit gesetzt war, erhielten wir die Trauerkunde, daß ihr Verfasser der Wissenschaft durch den Tod entrissen ist. Die Redaktion hat nach besten Kräften dafür gesorgt, daß dieses letzte Werk des zu früh Dahingeschiedenen auf das Sorgfältigste durchgesehen wurde.

Marburg, den 19. Juni 1909.

K. Hensel.

Table des matières.

Introduction.

Première partie.

Partition uniforme de l'espace analytique à n dimensions à l'aide des translations d'un même polyèdre convexe.

Section I.

Propriétés générales des paralléloèdres.

nº

1—3. Sur les polyèdres convexes à n dimensions.
4. Ensemble des domaines à n dimensions correspondant aux différents sommets d'un polyèdre convexe.
5. Définition du groupe de vecteurs.
6—7. Translation des polyèdres.
8. Définition des paralléloèdres.
9—11. Propriétés du groupe de vecteurs d'un paralléloèdre.
12—13. Propriétés des faces *à* $n-1$ dimensions d'un paralléloèdre.
14—16. Faces congruentes à différentes dimensions d'un paralléloèdre.

Section II.

Propriétés fondamentales des paralléloèdres primitifs.

17. Définition des paralléloèdres primitifs.
18. Arêtes des paralléloèdres primitifs de l'ensemble (R).
19. Forme canonique des équations qui définissent un sommet d'un paralléloèdre primitif.
20—21. Forme canonique des inégalités qui définissent un paralléloèdre primitif.
22—23. Ensemble des simplexes correspondant aux différents sommets d'un paralléloèdre primitif.
24—28. Sur une fonction définie par l'ensemble des simplexes correspondant aux différents sommets d'un paralléloèdre primitif.
29—31. Forme canonique des inégalités qui définissent l'ensemble (R) des paralléloèdres primitifs.
32—36. Fonction génératrice de l'ensemble (R) de paralléloèdres primitifs.
37—38. Propriétés fondamentales de la fonction génératrice $V(x_1, \ldots x_n, \lambda_1, \ldots \lambda_n)$.

n°
39—40. Détermination de la fonction génératrice $V(x_1, \ldots x_n, \lambda_1, \ldots \lambda_n)$.
41—42. Détermination du centre des parallélоèdres primitifs.
43—44. Groupe continu de transformations linéaires des parallélоèdres primitifs.

Section III.

Détermination des parallélоèdres à l'aide des formes quadratiques positives.

45—46. Définition du polyèdre convexe correspondant à une forme quadratique positive.
47—48. Inégalités independantes qui définissent le polyèdre convexe correspondant à une forme quadratique positive.
49. Ensemble (R) de parallélоèdres défini par une forme quadratique positive.
50. Algorithme pour la recherche du minimum de la forme $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\Sigma\alpha_i x_i$ dans l'ensemble E.
51—54. Propriétés des systèmes de nombres entiers qui caractérisent les faces à $n-1$ dimensions du parallélоèdre correspondant à une forme quadratique positive.

Seconde partie.

Domaines de formes quadratiques correspondant aux différents types de parallélоèdres primitifs.

Section IV.

Types différents de parallélоèdres primitifs.

55. Sur le nombre des faces à $n-1$ dimensions d'un parallélоèdre primitif.
56—59. Définition du type de parallélоèdres primitifs.
60—62. Définition de l'ensemble (L) de simplexes caractérisant un type de parallélоèdres primitifs.
63—68. Propriétés des symboles S_ν et σ_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$.
69—72. Régulateurs et caractéristiques des arêtes des parallélоèdres primitifs.
73—78. Transformation fondamentale de la forme $\Sigma\Sigma a_{ij} x_i x_j + 2\Sigma\alpha_i x_i - \Sigma\Sigma a_{ij} l_i l_j - 2\Sigma\alpha_i l_i$.
79—84. Définition des formes quadratiques à l'aide des régulateurs et des caractéristiques correspondants.

Section V.

Propriétés de l'ensemble (Δ) des domaines de formes quadratiques correspondant aux différents types de parallélоèdres primitifs.

85—86. Définition du domaine des formes quadratiques correspondant à une type de parallélоèdres primitifs.
87—90. Propriétés des régulateurs indépendants.
91—95. Reconstruction de l'ensemble (L) de simplexes en un autre ensemble (L') de simplexes.

n°
96. Algorithme pour la recherche des domaines de formes quadratiques qui sont contigus à un domaine donné par les faces à $\frac{n(n+1)}{2}-1$ dimensions.
97—99. Ensemble (Δ) des domaines de formes quadratiques correspondant aux différents types des parallélòdres primitifs.
100—101. Sur les parallélòdres imprimitifs correspondant aux formes quadratiques positives.
102—104. Domaine principal de l'ensemble (Δ).
105—110. Domaines de formes quadratiques contigus au domaine principal.
111. Parallélòdres à deux dimensions.
112—113. Parallélòdres à trois dimensions.
114—118. Parallélòdres à quatre dimensions.

Fin de la table des matières.

Über die zu einer algebraischen Gleichung gehörigen Auflösungskörper.

Von Herrn *K. Hensel* in Marburg a. d. L.

§ 1.

Die p-adischen rationalen und algebraischen Zahlen.

In dem von mir kürzlich veröffentlichten Werke „Theorie der algebraischen Zahlen“ Leipzig 1908*) habe ich die rationalen und die algebraischen p-adischen Zahlen in die Arithmetik eingeführt, um alle Fragen der Teilbarkeit in der niederen und höheren Zahlentheorie ebenso einfach behandeln zu können, wie dies in der Funktionentheorie schon seit langer Zeit geschieht.

Ist p irgend eine rationale Primzahl, so verstehe ich unter einer *rationalen p-adischen Zahl* eine unendliche Reihe

$$C = \sum_{\nu=\varrho}^{\nu=\infty} e_\nu p^\nu,$$

deren Koeffizienten e_ν gewöhnliche rationale modulo p ganze Zahlen sind, welche für jeden noch so großen Index ν berechnet werden können (Alg. Z. S. 16). Als *die Näherungswerte dieser Zahl für den Bereich von p* bezeichne ich die Reihe der gewöhnlichen rationalen Zahlen:

*) Im folgenden werde ich dieses Werk mit „Alg. Z.“ zitieren.

$$C_k = e_\varrho p^\varrho + e_{\varrho+1} p^{\varrho+1} + \cdots + e_{k-1} p^{k-1} \qquad (k = \varrho, \varrho+1, \cdots)$$

(Alg. Z. S. 19, 20). Zwei p-adische Zahlen C und C' heißen *gleich für den Bereich von* p, wenn ihre Näherungswerte C_k und C'_k von genügend hoher Ordnung k für jede noch so hohe Potenz von p als Modul kongruent sind (Alg. Z. S. 20).

Auf dieser Grundlage werden nun die elementaren Rechenoperationen für die rationalen p-adischen Zahlen definiert:

Sind nämlich A und B zwei beliebige p-adische Zahlen, so gibt es stets je eine und nur eine rationale p-adische Zahl, welche bzw. gleich

$$\text{(I.)} \qquad A+B,\ A-B,\ AB,\ \frac{A}{B}$$

ist; nur muß bei der Division der Fall $B=0$ ausgeschlossen werden (Alg. Z. S. 24 flgd.).

Man findet diese vier neuen p-adischen Zahlen, indem man die Reihen:

$$A = \Sigma a_i p^i, \qquad B = \Sigma b_k p^k$$

genau so, wie gewöhnliche Potenzreihen addiert, subtrahiert, multipliziert oder dividiert und die Resultate wieder nach Potenzen von p ordnet.

Für die so vollständig und eindeutig definierten elementaren Rechenoperationen sind dann die fünf Gleichungen:

$$\text{(Ia.)} \qquad \begin{gathered} A+B=B+A \\ AB=BA \\ (A+B)+C=A+(B+C) \\ (AB)C=A(BC) \\ A(B+C)=AB+AC \end{gathered}$$

unbeschränkt gültig (Alg. Z. S. 27).

Ich bringe dieses Resultat mit der folgenden ganz allgemeinen Definition in Verbindung:

Es sei K ein Bereich von Elementen $(A, B, C, \ldots)$. Es seien zwei Operationen der Verknüpfung gegeben, welche Addition und Multiplikation genannt werden sollen, welche innerhalb K unbeschränkt anwendbar sind und stets ein eindeutig bestimmtes Resultat ergeben. Für diese Operationen sollen die Grundgleichungen (Ia.) gelten.

Endlich soll der Bereich K so in sich abgeschlossen sein, daß *erstens* für je zwei beliebige Elemente A und B die Gleichung:

$$A + X = B \tag{Ib.}$$

eine einzige Lösung innerhalb K besitzt. Das so bestimmte Element X soll durch $B - A$ bezeichnet werden.

Aus den bisherigen Eigenschaften des Bereiches K folgt leicht, daß in ihm *ein einziges* Element $X = 0$ existiert, welches für jedes beliebige A der Gleichung

$$A + 0 = A \tag{Ic.}$$

genügt.

Zweitens soll K noch in der Weise abgeschlossen sein, daß für jedes $A \gtrless 0$ die Gleichung

$$AX = B$$

innerhalb K eine einzige Lösung besitzt. Wir bezeichnen das so eindeutig bestimmte Element X durch $\frac{B}{A}$.

Jeder Bereich K, welcher diesen sieben Bedingungen genügt, soll *ein Körper* genannt werden, gleichgültig, wie seine Elemente

und wie die Operationen der Addition und der Multiplikation sonst definiert sind*).

Allein aus diesen sieben einen Körper charakterisierenden Eigenschaften kann man nun, wie Herr *Weber* a. a. O. gezeigt hat, die Gültigkeit aller Sätze der elementaren Algebra herleiten, soweit sie sich nur auf rationale Operationen und allein auf Gleichungen, nicht auf Ungleichungen, beziehen. So gelten z. B. in jedem Körper die Sätze, daß ein Produkt nur dann Null sein kann, wenn wenigstens für einen seiner Faktoren das gleiche gilt, — daß sich jede ganze Funktion von einer Unbestimmten auf eine einzige Weise in irreduktible Faktoren zerlegen läßt, — daß eine Gleichung nicht mehr Wurzeln haben kann, als ihr Grad angibt, — daß eine Gleichung dann und nur dann innerhalb des Körpers eine Wurzel hat, wenn ihre linke Seite durch den zugehörigen Linearfaktor teilbar ist, — endlich auch die bekannten Sätze über die Darstellung und die Eigenschaften der Resultanten, der Diskriminanten usw.

Aus (I.) folgt nun unmittelbar, daß der Bereich aller rationalen p-adischen Zahlen einen Körper bildet; derselbe soll durch $K(p)$ bezeichnet werden. Jede gewöhnliche rationale Zahl ist für den Bereich einer beliebig gegebenen Primzahl p einer einzigen Zahl des Körpers $K(p)$ gleich (Alg. Z. S. 38) und jede zwischen beliebig vielen rationalen Zahlen bestehende rationale Gleichung mit rationalen Koeffizienten ist für den Bereich einer beliebigen Primzahl p ebenfalls erfüllt (Alg. Z. S. 46).

Für den Körper $K(p)$ sind jene Folgerungen aus den charakteristischen Eigenschaften des Körpers in meinem oben erwähnten Werke direkt hergeleitet und zugleich Methoden angegeben worden, um die Zerlegung einer Funktion $f(x)$ in irreduktible Faktoren wirklich und auf die einfachste Weise durchzuführen, was in der *Weber*schen Abhandlung natürlich nicht allgemein gezeigt werden konnte. (Vgl. Alg. Z. S. 28, 63 flgde., 52, 54 flgde.)

---

*) Die hier gegebene abstrakte Definition der Körper ist wohl zuerst, wenn auch in etwas anderer Form, von Herrn *H. Weber* „Die allgemeinen Grundlagen der *Galois*schen Gleichungstheorie“ Math. Ann. Bd. 43, S. 521—549 aufgestellt worden. Ich habe hier die Definitionen benutzt, welche Herr *E. Steinitz* in einer demnächst in diesem Journale erscheinenden interessanten Abhandlung „Algebraische Theorie der Körper“ aufgestellt hat. Ich möchte mit Dank hervorheben, daß mir diese Untersuchungen des Herrn *Steinitz* für die vorliegende Arbeit sehr wertvolle Anregungen gegeben haben.

Um nun alle Fragen der Teilbarbeit für die algebraischen Zahlen in gleich einfacher Weise zu erledigen, wie dies für die rationalen Zahlen durch die Einführung der ihnen für den Bereich von p gleichen p-adischen rationalen Zahlen geschieht, muß der Körper $K(p)$ noch mehr erweitert werden, weil er selbst noch nicht so groß ist, daß in ihm jede Gleichung

$$(1.) \qquad f(x) = a_0 x^\lambda + a_1 x^{\lambda-1} + \cdots + a_\lambda = 0 \qquad (p)$$

mit rationalen p-adischen Koeffizienten mindestens eine Wurzel besitzt.

Es ergibt sich so die Aufgabe, den Körper $K(p)$ in der Weise durch Adjunktion anderer Elemente zu vergrößern, daß der so gewonnene größere Bereich $\overline{K}$ ebenfalls ein Körper in dem oben angegebenen Sinne ist, und daß in ihm eine beliebig, aber bestimmt gegebene Gleichung (1.) mindestens eine Wurzel $\overline{\xi}$, oder, was dasselbe ist, daß ihre linke Seite $f(x)$ innerhalb $\overline{K}$ mindestens einen Linearfaktor $(x-\overline{\xi})$ besitzt. Bei dieser Fassung des Problems kann man sich wegen der eindeutigen Zerlegbarkeit der Funktionen $f(x)$ in irreduktible Faktoren innerhalb $K(p)$ von vornherein auf den Fall beschränken, daß $f(x)$ selbst innerhalb $K(p)$ irreduktibel ist, also nicht in Faktoren niedrigeren Grades mit rationalen p-adischen Koeffizienten zerlegt werden kann.

Die soeben gestellte Aufgabe läßt sich nun folgendermaßen lösen: Es sei α eine gewöhnliche algebraische Zahl, welche einer Gleichung des λ-ten Grades

$$(2.) \qquad f_0(x) = a_0^{(0)} x^\lambda + a_1^{(0)} x^{\lambda-1} + \cdots + a_\lambda^{(0)} = 0$$

mit *gewöhnlichen* rationalen Koeffizienten genügt, *die für den Bereich von p irreduktibel ist.* Ich betrachte dann den Bereich aller rationalen Funktionen von α

$$\beta = \varphi(\alpha)$$

mit rationalen p-adischen Koeffizienten. Dann beweist man, daß die Elemente $(\beta, \beta', \beta'', \cdots)$ dieses Bereiches ebenfalls einen Körper in dem vorher angegebenen Sinne bilden, allerdings *allein unter der Voraussetzung, daß die Grundgleichung* (2.) *wirklich für den Bereich von p unzerlegbar ist*

(Alg. Z., S. 129, unten); anderenfalls würde, wie man leicht erkennt, ein Produkt $\beta\beta'$ zweier Elemente dieses Bereiches Null sein können, ohne daß einer der Faktoren verschwindet, d. h. die Division würde nicht mehr eindeutig ausführbar sein. Wir wollen diesen Bereich *den durch die algebraische Zahl α konstituierten algebraischen Körper* nennen und durch $K(p, \alpha)$ bezeichnen.

Die Elemente eines solchen algebraischen Körpers lassen sich in genau derselben Weise darstellen, wie dies vorher für die rationalen p-adischen Zahlen angegeben wurde; für jede algebraische Zahl β besteht nämlich eine Darstellung:

$$\beta = \sum_{\nu=\varrho}^{\nu=\infty} \varepsilon_\nu \pi^\nu; \tag{3.}$$

hier bedeutet π den Primfaktor von p innerhalb $K(p, \alpha)$, und zwar ist π im allgemeinen gleich p selbst, in speziellen Fällen gleich einer gewissen e-ten Wurzel aus p (Alg. Z. S. 138); die Koeffizienten $\varepsilon_\varrho, \varepsilon_{\varrho+1}, \cdots$ sind modulo p ganze Zahlen des Bereiches $K(p, \alpha)$, welche für jeden Index ν berechnet werden können (Alg. Z. S. 145). Auch hier kann der Begriff der Gleichheit zweier solcher Zahlen sowie die vier elementaren Rechnungsoperationen genau so wie für die rationalen p-adischen Zahlen definiert, und es kann bewiesen werden, daß auch für sie die sieben für einen Körper charakteristischen Bedingungen (Ia.)—(Ic.) sämtlich erfüllt sind.

Ist β eine beliebige Zahl des Körpers $K(p, \alpha)$, und bildet man die λ Gleichungen mit rationalen p-adischen Koeffizienten b_{ik}

$$\begin{aligned}
\beta \cdot 1 &= b_{00} + b_{01}\alpha + \cdots + b_{0\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}, \\
\beta \cdot \alpha &= b_{10} + b_{11}\alpha + \cdots + b_{1\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}, \\
&\vdots \\
\beta\alpha^{\lambda-1} &= b_{\lambda-1,0} + b_{\lambda-1,1}\alpha + \cdots + b_{\lambda-1,\lambda-1}\alpha^{\lambda-1},
\end{aligned}$$

so ergibt sich durch Elimination von α, daß β der Gleichung λ-ten Grades:

$$g(\beta) = (-1)^\lambda |b_{ik} - \delta_{ik}\beta| = \beta^\lambda + b_1\beta^{\lambda-1} + \cdots + b_\lambda = 0$$

mit rationalen p-adischen Koeffizienten b_l genügt; man beweist sehr leicht,

daß die linke Seite dieser Gleichung selbst irreduktibel oder eine Potenz einer irreduktiblen Funktion ist. Im ersten Falle heißt β eine *primitive*, im zweiten eine *imprimitive Zahl* des Körpers $K(p, \alpha)$.

Nun zeigt sich, daß man für jede irreduktible Gleichung $f(x)=0$ einen algebraischen Körper $K(p, \alpha)$ so bestimmen kann, daß diese innerhalb jenes Körpers mindestens eine Wurzel β besitzt. Man findet einen solchen Körper, indem man für α eine der λ Wurzeln $\alpha^{(k)}$ der Gleichung:

$$f^{(k)}(x) = a_0^{(k)} x^{\lambda} + a_1^{(k)} x^{\lambda-1} + \cdots + a_{\lambda-1}^{(k)} x + a_{\lambda}^{(k)} = 0$$

wählt. Hier ist $f^{(k)}(x)$ irgendein k-ter Näherungswert der Funktion $f(x)$ mit p-adischen Koeffizienten, d. h. die gewöhnlichen rationalen Zahlen $a_r^{(k)}$ sind die k-ten Näherungswerte der entsprechenden p-adischen Zahlen a_r. Wählt man die Ordnungszahl k genügend groß, nämlich größer als die Ordnungszahl δ der Diskriminante von $f(x)$, so ist man sicher, daß in dem zugehörigen Körper $K(p, \alpha)$ jene Gleichung wirklich eine Wurzel besitzt (Alg. Z. S. 155 IV. und 157 unten).

Aber schon aus diesem Resultate ergibt sich, daß nicht bloß *ein* solcher Körper $K(p, \alpha)$ existiert, innerhalb dessen die Gleichung $f(x)=0$ aufgelöst werden kann, sondern daß stets unendlich viele algebraische Körper die gleiche Eigenschaft besitzen; denn das ist schon für alle Körper $K(p, \alpha^{(k)})$ der Fall, für welche $\alpha^{(k)}$ durch eine der unendlich vielen Näherungsgleichungen

$$f^{(k)}(x) = 0 \qquad (k = \delta+1, \delta+2, \ldots)$$

definiert ist. Diese Körper sind auch im allgemeinen *algebraisch* vollständig von einander verschieden. Es ist nun aber von fundamentaler Bedeutung, daß alle diejenigen Körper kleinsten Grades $K(p, \alpha)$, innerhalb deren eine und dieselbe irreduktible Gleichung $f(x)=0$ eine Wurzel besitzt, arithmetisch für den Bereich von p absolut äquivalent sind, so daß es für alle auf die Teilbarkeit durch p bezüglichen Sätze der durch jene Gleichung definierten algebraischen Zahlen völlig gleichgültig ist, innerhalb welches Körpers $K(p, \alpha)$ sie aufgelöst wird.

Ich will nämlich im folgenden den Satz beweisen:

Sind $K(p, \alpha)$ und $K(p, \bar{\alpha})$ irgendwelche Körper niedrigsten Grades, innerhalb deren dieselbe Gleichung $f(x) = 0$ eine Wurzel besitzt, so lassen sich ihre Elemente γ und $\bar{\gamma}$ einander eindeutig so zuordnen, daß jede zwischen beliebig vielen Elementen $\gamma, \delta, \ldots \varepsilon$ des einen Körpers bestehende rationale Gleichung

$$\varphi(\gamma, \delta, \ldots \varepsilon) = 0$$

mit rationalen p-adischen Koeffizienten richtig bleibt, wenn man diese Elemente durch die zugeordneten $\bar{\gamma}, \bar{\delta}, \ldots \bar{\varepsilon}$ des zweiten Körpers ersetzt. Zwei solche algebraischen Körper sollen *äquivalent für den Bereich von p* genannt werden.

Da nun weiter gezeigt werden wird, daß alle auf die Teilbarkeit der algebraischen Zahlen durch die Primzahl p bezüglichen Sätze auf der Form gewisser Gleichungen zwischen Zahlen des zugehörigen Körpers $K(p, \alpha)$ beruhen, und da diese Gleichungen für äquivalente Körper dieselben bleiben, so wird damit der Nachweis geführt sein, daß die Auswahl des eine vorgelegte Gleichung $f(x) = 0$ auflösenden Zahlkörpers vollständig gleichgültig ist.

§ 2.

Die äquivalenten algebraischen Zahlkörper.

Zwei p-adische algebraische Zahlkörper nenne ich *äquivalent* oder auch (in Erweiterung einer Bezeichnung von Herrn *Steinitz*) *isomorph*, wenn in ihnen zwei primitive Elemente α und $\bar{\alpha}$ existieren, welche beide *derselben* für den Bereich von p irreduktiblen Gleichung:

$$(1.) \qquad f(x) = a_0 x^\lambda + a_1 x^{\lambda-1} + \cdots + a_\lambda = 0$$

mit rationalen p-adischen Koeffizienten genügen. Zu einem jeden Körper $K(p, \alpha)$ gibt es unendlich viele äquivalente. Z. B. sind konjugierte Körper immer äquivalent; aber auch alle die unendlich vielen im vorigen Abschnitte definierten Körper $K(p, \alpha^{(k)})$ sind einander äquivalent, da in jedem

von ihnen eine Wurzel der Gleichung (1.) a. v. S. vorhanden ist. Sind zwei Körper äquivalent, und sind α und $\overline{\alpha}$ zwei primitive Zahlen, welche derselben Gleichung genügen, so können diese als Grundzahlen gewählt, jene Körper also durch $K(p, \alpha)$ und $K(p, \overline{\alpha})$ bezeichnet werden.

Ich will dann immer zwei Zahlen β und $\overline{\beta}$ jener beiden Körper einander zuordnen und sie *äquivalente Zahlen* nennen, wenn sie jedesmal dieselbe rationale Funktion von α bzw. von $\overline{\alpha}$ sind, wenn also

$$\beta = \varphi(\alpha), \quad \overline{\beta} = \varphi(\overline{\alpha}) \tag{2.}$$

ist. So sind alle Zahlen jener beiden Körper einander eindeutig zugeordnet; speziell ist $\alpha \frown \overline{\alpha}$.

Es seien nun $\beta, \gamma, \delta, \ldots \varepsilon$ Zahlen der ersten, und $\overline{\beta}, \overline{\gamma}, \overline{\delta}, \ldots \overline{\varepsilon}$ die ihnen äquivalenten Zahlen des zweiten Körpers. Dann ist eine rationale Gleichung

$$\Phi(\beta, \gamma, \delta, \ldots \varepsilon) = 0 \tag{3.}$$

mit rationalen p-adischen Koeffizienten stets und nur dann zwischen den Zahlen des ersten Körpers erfüllt, wenn dieselbe Gleichung

$$\Phi(\overline{\beta}, \overline{\gamma}, \overline{\delta}, \ldots \overline{\varepsilon}) = 0 \tag{3a.}$$

zwischen den äquivalenten Zahlen des äquivalenten Körpers besteht.

In der Tat, ersetzt man in (3.) $\beta, \gamma, \delta, \ldots \varepsilon$ durch ihre rationalen p-adischen Ausdrücke in α

$$\beta = \varphi(\alpha), \ \gamma = \psi(\alpha), \ldots \varepsilon = \chi(\alpha), \tag{4.}$$

so geht diese Gleichung über in

$$\Phi(\varphi(\alpha), \psi(\alpha), \ldots \chi(\alpha)) = \Psi(\alpha) = 0, \tag{5.}$$

und wegen der Irreduktibilität der Grundgleichung (1.) ist diese Gleichung dann und nur dann erfüllt, wenn $\Psi(x)$ durch $f(x)$ teilbar, wenn also

$$(5^{a}.) \qquad \Psi(x) = f(x)\ \Psi_0(x)$$

ist. Ersetzt man aber in dieser Gleichung x durch $\bar{\alpha}$, so wird ihre rechte Seite n. d. V. Null, und aus $(5^{a}.)$ und (5.) folgt

$$(5^{b}.) \qquad \Phi(\varphi(\bar{\alpha}), \psi(\bar{\alpha}), \ldots \chi(\bar{\alpha})) = \Phi(\bar{\beta}, \bar{\gamma}, \ldots \bar{\varepsilon}) = 0;$$

damit ist der Beweis unseres Theorems erbracht.

Hieraus folgt, daß zwei algebraische Zahlen β und $\bar{\beta}$ dann und nur dann als äquivalent betrachtet werden können, wenn sie derselben rationalen Gleichung niedrigsten Grades mit rationalen p-adischen Koeffizienten genügen. Ist dies nämlich der Fall, so sind ja die zugehörigen Körper $K(p, \beta)$ und $K(p, \bar{\beta})$ äquivalent, es kann also $\beta \backsim \bar{\beta}$ gesetzt werden; genügt umgekehrt β der irreduktiblen Gleichung $g(\beta) = 0$, so ist die äquivalente Zahl $\bar{\beta}$ nach dem allgemeinen Theorem Wurzel derselben Gleichung.

Aus diesem Haupttheorem fließen nun eine ganze Reihe von Folgerungen:

I. Äquivalente Körper haben gleichen Grad;

denn die beiden äquivalenten primitiven Zahlen α und $\bar{\alpha}$ genügen derselben irreduktiblen Gleichung des λ-ten Grades.

II. Je zwei äquivalente Zahlen β und $\bar{\beta}$ genügen derselben irreduktiblen Gleichung.

Denn nach dem obigen Satze ist jede Gleichung $g(\beta) = 0$, welcher β genügt, auch für $\bar{\beta}$ erfüllt. Hieraus folgt auch, daß äquivalente konjugierte Zahlen $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\lambda$ und $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \ldots \bar{\beta}_\lambda$ derselben Gleichung genügen, denn diese ist entweder selbst irreduktibel oder eine Potenz der zugehörigen irreduktiblen Gleichung.

III. Äquivalente Zahlen haben gleiche Norm.

Denn die Norm ist ja, abgesehen vom Vorzeichen, das konstante Glied in der Gleichung λ-ten Grades, der sowohl β_1 als auch $\bar{\beta}_1$ genügen.

IV. Je zwei äquivalente Zahlen sind entweder beide ganz oder beide gebrochen. Ist eine von ihnen eine Einheit, so ist es auch die andere.

In der Tat sind die algebraischen Zahlen β und $\bar{\beta}$ ganz oder gebrochen, je nachdem die rationale Zahl $n(\beta) = n(\bar{\beta})$ dieselbe Eigenschaft besitzt (Alg. Z. S. 135 II). Ebenso sind β und $\bar{\beta}$ algebraische Einheiten, wenn $n(\beta) = n(\bar{\beta})$ eine rationale Einheit ist (Alg. Z. S. 135 IV).

V. Jede Kongruenz:

$$\beta \equiv \gamma \pmod{\delta}$$

in dem Körper $K(p, \alpha)$ bleibt für die äquivalenten Zahlen im äquivalenten Körper richtig;

denn diese Kongruenz besagt ja nur, daß die rationale p-adische Zahl $n\left(\frac{\beta-\gamma}{\delta}\right) = n\left(\frac{\bar{\beta}-\bar{\gamma}}{\bar{\delta}}\right)$ für den Bereich von p ganz ist.

VI. Eine Zahl $\pi = \varphi(\alpha)$ von $K(p, \alpha)$ ist dann und nur dann für den Bereich von p eine Primzahl, wenn das gleiche für die äquivalente Zahl $\bar{\pi} = \varphi(\bar{\alpha})$ des äquivalenten Körpers gilt.

In der Tat ist diese Bedingung dann und nur dann erfüllt, wenn $n(\pi) = n(\bar{\pi})$ eine positive aber möglichst niedrige Ordnungszahl hat (Alg. Z. S. 138).

Jede Zahl β von $K(p, \alpha)$ kann auf eine einzige Weise in der Form $\beta = \varepsilon \pi^{\varrho}$ dargestellt werden, wo ε eine Einheit, π eine Primzahl bedeutet, und ϱ die Ordnungszahl von β ist. Da dieser Gleichung innerhalb $K(p, \bar{\alpha})$ die Gleichung $\bar{\beta} = \bar{\varepsilon}\bar{\pi}^{\varrho}$ entspricht, und nach (4.) und (6.) auch $\bar{\varepsilon}$ eine Einheit, $\bar{\pi}$ eine Primzahl für den äquivalenten Körper ist, so gilt der Satz:

VII. Äquivalente Zahlen haben dieselben Ordnungszahlen.

Ist $n(\pi) = p^f$, so ist die Anzahl der modulo π inkongruenten Einheiten innerhalb $K(p, \alpha)$ gleich p^f, und es existiert innerhalb dieses Körpers ein vollständiges Restsystem modulo π, dessen Elemente die sämtlichen Wurzeln sind, welche die Gleichung

$$H_f(x) = x^{p^f} - x = 0 \tag{6.}$$

innerhalb jenes Körpers besitzt. Ist η eine primitive Wurzel jener Gleichung, so sind alle anderen Zahlen jenes Restsystemes in der Reihe

$$0, 1, \eta, \eta^2, \ldots \eta^{p^f-2} \tag{7.}$$

enthalten (Alg. Z. S. 189). Die Gesamtheit aller rationalen Funktionen dieser primitiven Einheit η mit rationalen p-adischen Koeffizienten kon-

stituiert ebenfalls einen Körper $K(p, \eta)$, den *sog. Koeffizientenkörper von* $K(p, \alpha)$. Dieser ist vom f-ten Grade, er ist ein Oberkörper zu $K(p)$ und ein Unter- oder Teilkörper von $K(p, \alpha)$. Jede ganze Zahl von $K(p, \alpha)$ ist einer Zahl dieses Koeffizientenkörpers modulo π kongruent.

Jede Primzahl π von $K(p, \alpha)$ genügt innerhalb des Koeffizientenkörpers $K(p, \eta)$ einer irreduktiblen sog. *Eisensteinschen Gleichung*:

$$(8.) \qquad \psi(\pi, \eta) = \pi^e + pc_{e-1}(\eta)\pi^{e-1} + \cdots + pc_1(\eta)\pi + pc_0(\eta) = 0,$$

deren Koeffizienten ganze Zahlen von $K(p, \eta)$ sind, und deren letzter $c_0(\eta)$ eine Einheit ist (Alg. Z. S. 196 [1]). Ist e der Grad dieser Gleichung, ist also π gleich einer gewissen e-ten Wurzel aus p, so ist $ef = \lambda$, und die λ Zahlen des Bereiches $K(p, \alpha)$:

$$(9.) \qquad 1, \eta, \ldots \eta^{f-1}, \pi, \pi\eta, \ldots \pi\eta^{f-1}, \ldots \pi^{e-1}, \pi^{e-1}\eta, \ldots \pi^{e-1}\eta^{f-1}$$

bilden ein Fundamentalsystem für den Körper $K(p, \alpha)$; jede Zahl β dieses Körpers läßt sich also durch diese λ Zahlen homogen und linear mit rationalen p-adischen Koeffizienten darstellen (Alg. Z. S. 222 [4.]). Ordnet man hier die Elemente anders an, so ergibt sich die Darstellung:

$$(10.) \qquad \beta = \eta^{(r)}\pi^r + \eta^{(r+1)}\pi^{r+1} + \cdots,$$

wo die Koeffizienten $\eta^{(i)}$ bestimmte ganze Zahlen des Koeffizientenkörpers $K(p, \eta)$ sind, welche für jeden noch so großen Index i berechnet werden können (Alg. Z. S. 186 [5.]).

Es sei nun $K(p, \alpha) \backsim K(p, \bar{\alpha})$. Ist dann $\eta \backsim \bar{\eta}$, so ist auch $\bar{\eta}$ eine primitive Wurzel derselben Gleichung (6.) $H_f(x) = 0$ wie η, und der durch $\bar{\eta}$ konstituierte Koeffizientenkörper $K(p, \bar{\eta})$ ist zu $K(p, \eta)$ äquivalent. Ist $\bar{\pi}$ die zu π äquivalente Zahl, so genügt nach dem allgemeinen Satze a. S. 191 $\bar{\pi}$ innerhalb $K(p, \bar{\eta})$ derselben *Eisenstein*schen Gleichung:

$$\psi(\bar{\pi}, \bar{\eta}) = 0.$$

Ist $\overline{\beta} \backsim \beta$, so besteht endlich für $\overline{\beta}$ die Entwicklung

$$\overline{\beta} = \overline{\eta}^{(r)}\overline{\pi}^{r} + \overline{\eta}^{(r+1)}\overline{\pi}^{r+1} + \cdots,$$

wo $\overline{\eta}^{(r)}, \overline{\eta}^{(r+1)}, \ldots$ die zu $\eta^{(r)}, \eta^{(r+1)}, \ldots$ äquivalenten Zahlen innerhalb des Koeffizientenkörpers $K(\overline{\eta})$ sind.

Ist nun

$$f(x) = 0 \tag{11.}$$

irgendeine für den Bereich von p irreduktible Gleichung λ-ten Grades, so gibt es, wie bereits oben erwähnt wurde, mindestens einen algebraischen Körper $K(p, \alpha)$ desselben Grades, innerhalb dessen jene Gleichung eine Wurzel β besitzt. Ein jeder solcher Körper $K(p, \alpha)$ soll *ein Auflösungskörper für jene Gleichung* heißen. Ist nun $K(p, \overline{\alpha})$ ein anderer Auflösungskörper für dieselbe Gleichung, und ist die primitive Zahl $\overline{\beta}$ in ihm eine Wurzel jener Gleichung, so ist $\overline{\beta} \backsim \beta$, weil beide Zahlen Wurzeln derselben rationalen Gleichung (11.) sind, und da sie außerdem beide primitive Zahlen sind, so ist $K(p, \overline{\alpha}) \backsim K(p, \alpha)$, . Ist umgekehrt $K(p, \alpha) \backsim K(p, \overline{\alpha})$, ist ferner $K(p, \alpha)$ ein Auflösungskörper jener Gleichung und β eine Wurzel derselben, so befriedigt die zu β äquivalente Zahl $\overline{\beta}$ diese Gleichung ebenfalls, d. h. auch $K(p, \overline{\alpha})$ ist ein Auflösungskörper für jene Gleichung.

Zwei algebraische Körper sind also dann und nur dann Auflösungskörper derselben p-adischen Gleichung, wenn sie äquivalent sind.

Hieran schließt sich nun die wichtige Frage, wann zwei Körper desselben Grades $K(p, \alpha)$ und $K(p, \overline{\alpha})$ äquivalent sind. Nach dem bisher Bewiesenen ist dies dann und nur dann der Fall, wenn sie zwei primitive Elemente β und $\overline{\beta}$ enthalten, welche äquivalent sind, welche also derselben irreduktiblen Gleichung des λ-ten Grades genügen. Diese Frage wird nun sehr einfach durch den folgenden Satz beantwortet:

Zwei algebraische Körper desselben Grades sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie zwei äquivalente Primzahlen enthalten.

In der Tat, sind die beiden Körper äquivalent, so enthalten sie lauter äquivalente Elemente, also auch sicher zwei äquivalente Primzahlen. Um auch die Umkehrung jenes Satzes zu beweisen, nehme ich an, jene beiden Körper enthalten zwei äquivalente Primzahlen π und $\bar{\pi}$, und es sei

$$\Psi(x) = x^\lambda + A_{\lambda-1}x^{\lambda-1} + \cdots + A_0 = 0$$

die reduktible oder irreduktible Gleichung des λ-ten Grades, der sowohl π als auch $\bar{\pi}$ genügen. Ist diese Gleichung irreduktibel, so ist unser Satz bereits bewiesen, denn dann sind die äquivalenten Zahlen π und $\bar{\pi}$ primitive Zahlen jener beiden Körper, diese sind also sicher äquivalent. Ist dagegen $\Psi(x)$ reduktibel, so besitzen die beiden äquivalenten Primzahlen denselben Grad f, da dieser die Ordnungszahl des konstanten Gliedes A_0 in $\Psi(x)$ ist. Daraus folgt, daß die beiden Koeffizientenkörper der zu untersuchenden algebraischen Körper äquivalent sind, denn die modulo π bzw. $\bar{\pi}$ inkongruenten Zahlen genügen ja beide derselben Gleichung $H_f(x) = 0$. Es seien nun η und $\bar{\eta}$ zwei äquivalente primitive Einheiten jener beiden Körper d. h. solche, welche derselben irreduktiblen p-adischen Gleichung f-ten Grades

$$g(x) = x^f + g_1 x^{f-1} + \cdots + g_f = 0 \qquad (12.)$$

genügen, deren linke Seite einer der Faktoren von $H_f(x)$ ist. Adjungiert man dann η dem Rationalitätsbereiche $K(p)$, so zerfällt die Funktion $\Psi(x)$ in das Produkt der f irreduktiblen Faktoren

$$\Psi(x) = \psi(x, \eta)\,\psi(x, \eta^p) \cdots \psi\left(x, \eta^{p^{f-1}}\right),$$

und wir erhalten dieselbe Zerlegung bei Adjunktion der äquivalenten Einheit $\bar{\eta}$, da diese derselben Gleichung (12.) genügt.

Also genügen π und $\bar{\pi}$ auch derselben innerhalb $K(p, \eta)$ bzw. $K(p, \bar{\eta})$ irreduktiblen *Eisenstein*schen Gleichung

$$\psi(\pi, \eta) = 0 \text{ bzw. } \psi(\bar{\pi}, \bar{\eta}) = 0.$$

Nun bilden aber sowohl die $\lambda = ef$ Zahlen

$$\eta^i \pi^k \text{ von } K(p, \alpha), \text{ als auch die Elemente } \bar{\eta}^i \bar{\pi}^k \text{ von } K(p, \bar{\ })$$
$$(i = 0, 1, \ldots f-1;\ k = 0, 1, \ldots e-1)$$

je ein Fundamentalsystem für diese beiden Körper. Ist nun β irgend eine primitive Zahl von $K(p, \alpha)$, und

$$\beta = \sum_{i=0}^{f-1} \sum_{k=0}^{e-1} c_{ik} \eta^i \pi^k$$

ihre Darstellung durch das erste Fundamentalsystem, und betrachtet man dann die durch die Gleichung

$$\bar{\beta} = \sum_{0}^{f-1} \sum_{0}^{e-1} c_{ik} \bar{\eta}^i \bar{\pi}^k$$

bestimmte Zahl von $K(p, \bar{\alpha})$, so genügen beide Zahlen derselben irreduktiblen rationalen Gleichung λ-ten Grades, da ihre Koeffizienten allein von den c_{ik} und den Koeffizienten von $\psi(x, \eta)$ und $g(x)$, und zwar in derselben Weise, abhängen. Da somit diese beiden primitiven Zahlen β und $\bar{\beta}$ der beiden Körper $K(p, \alpha)$ und $K(p, \bar{\alpha})$ äquivalent sind, so sind diese Körper selbst äquivalent.

Ich rechne jetzt alle äquivalenten Körper $K(p, \alpha)$ in eine und dieselbe Klasse; dann ergibt sich sofort die Frage, wie groß die Anzahl dieser Klassen von Körpern eines und desselben Grades λ ist. Zunächst folgt aus den a. S. 198 Mitte der Alg. Z. durchgeführten Betrachtungen, daß zu jedem Grade λ stets eine *endliche* Anzahl solcher Klassen gehört. Ist nämlich $\lambda = ef$ irgend eine Zerlegung von λ in zwei komplementäre Faktoren, und ist A_e die Anzahl aller nicht äquivalenten Körper λ-ten Grades, deren Primzahl vom f-ten Grade nnd von der e-ten Ordnung, deren Koeffizientenkörper $K(p, \eta)$ also vom f-ten Grade ist, so ist

$$C_\lambda = \sum_{ef=\lambda} A_e.$$

Es ist also nur zu bestimmen, wie groß die Anzahl A_e aller nicht äquivalenten Primzahlen e-ter Ordnung ist, welche zu einem gegebenen Koeffizientenkörper $K(p, \eta)$ vom f-ten Grade gehören.

Nun ist a. a. O. S. 208 gezeigt worden, daß man die Primzahl π innerhalb des Körpers $K(p, \eta)$ stets so auswählen kann, daß sie im Koeffizientenkörper $K(p, \eta)$ einer sog. *reduzierten Eisenstein*schen Gleichung

$$\psi_0(\pi, \eta) = \pi^e + p\, c_{e-1}^{(0)}(\eta)\, \pi^{e-1} + \cdots + p\, c_0^{(0)} = 0$$

genügt, deren Koeffizienten $c_i^{(0)}$ modulo p^{2s+1} reduzierte ganze Zahlen des Koeffizientenkörpers $K(p, \eta)$ sind, wenn p^s die höchste in e enthaltene Potenz der Primzahl p bedeutet. Unter diesen Primzahlen werden nun im allgemeinen noch äquivalente vorhanden sein; jedenfalls ist aber die Anzahl dieser reduzierten Gleichungen, also auch die ihr höchstens gleiche Anzahl A_e endlich, und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

In dem regulären Falle, daß der Grad λ durch die Primzahl p nicht teilbar ist, können jene Anzahlen A_e und damit auch die Klassenanzahl C_λ direkt angegeben werden. In diesem Falle wird nämlich a. a. O. S. 201—203 gezeigt, daß jede Primzahl π von einer Ordnung e, die ein Teiler von λ ist, im Körper $K(p, \alpha)$ auf eine einzige Weise so gewählt werden kann, daß sie innerhalb des Koeffizientenkörpers $K(p, \eta)$ einer *reinen Eisenstein*schen Gleichung e-ten Grades

$$\psi_0(\pi, \eta) = \pi^e - \eta^{k_0} p = 0$$

genügt; hier ist η die primitive Einheit jenes Körpers, k_0 eine der Zahlen $0, 1, \ldots e_0 - 1$, und

$$e_0 = (e, p^f - 1)$$

bedeutet den größten gemeinsamen Teiler von e und $p^f - 1$. Hieraus folgt also in diesem regulären Falle für die Klassenanzahl die einfache Gleichung:

$$C_\lambda = \sum_{ef=\lambda} (e, p^f - 1)$$

wo die Summe über alle komplementären Teiler $ef = \lambda$ zu erstrecken ist. So ergibt sich z. B.

für $p = 3,\ \lambda = 6$:

$$C_6 = (6, 3^1-1) + (3, 3^2-1) + (2, 3^3-1) + (1, 3^6-1) = 6,$$

für $p = 5,\ \lambda = 12$:

$$C_{12} = (12, 5^1-1) + (6, 5^2-1) + (4, 5^3-1) + (3, 5^4-1) + (2, 5^6-1) + (1, 5^{12}-1) = 20.$$

§ 3.

Die zu einer Gleichung zugehörigen Zerlegungskörper.

Die bisherigen Betrachtungen haben gezeigt, daß jeder für den Bereich von p irreduktiblen p-adischen Gleichung

$$(1.) \qquad f(x) = x^\lambda + a_1 x^{\lambda-1} + \cdots + a_\lambda = 0$$

stets ein und, abgesehen von äquivalenten Körpern, auch nur ein algebraischer Auflösungskörper $K(p, \alpha_1)$ entspricht, innerhalb dessen jene Gleichung mindestens eine Wurzel

$$(2.) \qquad \beta_1 = \varphi(\alpha_1)$$

besitzt. Man kann nun aber weiter den Nachweis führen, daß für jede solche Gleichung (1.) ein und, abgesehen von äquivalenten, auch nur ein algebraischer Körper niedrigsten Grades $K(p, \overline{\alpha}_0)$ existiert, innerhalb dessen jene Gleichung genau so viele Wurzeln $\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \ldots \overline{\beta}_\lambda$ besitzt, als ihr Grad angibt, und für welche dann die identische Gleichung

$$f(x) = (x-\overline{\beta}_1)\ (x-\overline{\beta}_2) \cdots (x-\overline{\beta}_\lambda)$$

besteht. Jeder solche Körper soll ein *Zerlegungskörper für die Grundgleichung* (1.) genannt werden.

Zunächst zeigt man auf die folgende Weise, daß und wie man *einen* solchen Zerlegungskörper für die Grundgleichung (1.) finden kann:

Es sei $K(p, \alpha_1)$ ein Auflösungskörper λ-ter Ordnung für diese Gleichung; er sei also so gewählt, daß in ihm *eine* primitive p-adische Zahl $\beta_1 = \varphi(\alpha_1)$ existiert, welche dieser Gleichung genügt. Es seien nun $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_\lambda$ die zu α_1 konjugierten gewöhnlichen algebraischen Zahlen, also

$$(3.) \qquad g(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_\lambda) = 0$$

die irreduktible Gleichung mit gewöhnlichen rationalen Koeffizienten, der α_1 genügt. Dann mögen, was bekanntlich stets auf unendlich viele Arten geschehen kann, in

$$(4.) \qquad \alpha_0 = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_\lambda\alpha_\lambda$$

die Koeffizienten a_i als rationale Zahlen so bestimmt werden, daß

$$K(\alpha_0) = K(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\lambda)$$

der durch diese konjugierten Zahlen konstituierte *Galois*sche Körper niedrigster Ordnung ist, sodaß

$$(5.) \qquad \alpha_1 = \chi_1(\alpha_0),\ \alpha_2 = \chi_2(\alpha_0),\ \ldots\ \alpha_\lambda = \chi_\lambda(\alpha_0)$$

wird, wo die $\chi_i(\alpha_0)$ ganze Funktionen von α_0 mit gewöhnlichen rationalen Koeffizienten bedeuten.

Es sei nun

$$(6.) \qquad H(x) = 0$$

die irreduktible Gleichung, welcher α_0 genügt, durch welche also der Körper $K(\alpha_0)$ konstituiert wird. Die linke Seite dieser Gleichung denke ich mir

für den Bereich von p in ihre irreduktiblen Faktoren zerlegt, und es sei $h(x)$ einer derselben, sodaß

$$(6^{a}.) \qquad H(x) = h(x)\,\bar{h}(x) \quad (p)$$

ist. Ich betrachte nun die irreduktible Gleichung mit p-adischen Koeffizienten

$$(6^{b}.) \qquad h(x) = 0 \quad (p),$$

und nehme an, $K(p, \bar{\gamma})$ sei ein Auflösungskörper niedrigster Ordnung für diese, sodaß diese Gleichung innerhalb jenes Körpers mindestens eine primitive p-adische Zahl $\bar{\alpha}_0$ als Wurzel besitzt. Dann behaupte ich, daß dieser Körper $K(p, \bar{\gamma}) = K(p, \bar{\alpha}_0)$ ein Auflösungskörper für die Grundgleichung (1.) ist. Definiert man nämlich die p-adischen algebraischen Zahlen $\bar{\alpha}_1, \ldots \bar{\alpha}_\lambda$ und $\bar{\beta}_1, \ldots \bar{\beta}_\lambda$ dieses Körpers durch die Gleichungen

$$(7.) \qquad \bar{\alpha}_1 = \chi_1(\bar{\alpha}_0), \ldots \bar{\alpha}_\lambda = \chi_\lambda(\bar{\alpha}_0),$$

wo die rationalen Funktionen χ_i dieselben sind wie in (5.), und

$$(7^{a}.) \qquad \bar{\beta}_1 = \varphi(\bar{\alpha}_1), \ldots \bar{\beta}_\lambda = \varphi(\bar{\alpha}_\lambda),$$

wo φ die in (2.) auftretende Funktion ist, so besteht für $f(x)$ die Zerlegung:

$$(8.) \qquad f(x) = (x - \bar{\beta}_1) \cdots (x - \bar{\beta}_\lambda).$$

In der Tat, sind die gewöhnlichen algebraischen Zahlen α_i von $K(\alpha_0)$ durch die Gleichungen (5.), die p-adischen Zahlen $\bar{\alpha}_i$ von $K(p, \bar{\alpha}_0)$ durch die gleichgebildeten Gleichungen (7.) definiert, so beweist man genau wie a. S. 191, daß jede zwischen ihnen der Größe nach bestehende rationale Gleichung

$$\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\lambda) = 0$$

mit gewöhnlichen rationalen Koeffizienten für den Bereich von p richtig bleibt, wenn man die α_i durch die $\overline{\alpha}_i$ ersetzt. Führt man nämlich für die Zahlen α_i ihre Ausdrücke $\chi_i(\alpha_0)$ in (5.) ein, so kann die dann sich ergebende rationale Gleichung für α_0:

$$\Phi(\chi_1(\alpha_0), \ldots \chi_\lambda(\alpha_0)) = \Phi_0(\alpha_0) = 0$$

mit gewöhnlichen rationalen Koeffizienten nur dann bestehen, wenn ihre linke Seite $\Phi_0(x)$ durch die irreduktible Funktion $H(x)$ teilbar ist. Betrachtet man aber die somit bestehende Identität

$$\Phi_0(x) = H(x)\,\overline{H}(x)$$

für den Bereich von p und ersetzt in ihr die Variable x durch $\overline{\alpha}_0$, so verschwindet ihre rechte Seite für den Bereich von p, d. h. es ist auch:

$$\Phi(\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots \overline{\alpha}_\lambda) = 0 \quad (p),$$

w. z. b. w.

Hieraus folgt zuerst, daß auch für die Zahlen $\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1, \ldots \overline{\alpha}_\lambda$ die Gleichung

$$\overline{\alpha}_0 = a_1\overline{\alpha}_1 + \cdots + a_\lambda\overline{\alpha}_\lambda \quad (p) \tag{9.}$$

besteht, da dieselbe Gleichung nach (4.) für $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_\lambda$ erfüllt ist. Zweitens ergibt sich aus (3.) die folgende für den Bereich von p gültige Zerlegung:

$$g(x) = (x-\overline{\alpha}_1)(x-\overline{\alpha}_2)\cdots(x-\overline{\alpha}_\lambda) \quad (p). \tag{10.}$$

Hieraus folgt, daß die gewöhnlichen algebraischen Zahlen $\alpha_1, \ldots \alpha_\lambda$ und

die p-adischen Zahlen $\overline{\alpha}_1, \ldots \overline{\alpha}_\lambda$ alle untereinander äquivalent sind, weil sie derselben für den Bereich von p irreduktiblen Gleichung $g(x)=0$ genügen. Da nun die p-adische Zahl $\beta_1=\varphi(\alpha_1)$ der irreduktiblen Gleichung $f(x)=0$ genügt, so gilt dasselbe von den λ zu β_1 äquivalenten Zahlen

$$\overline{\beta}_1=\varphi(\overline{\alpha}_1),\ \overline{\beta}_2=\varphi(\overline{\alpha}_2), \ldots \overline{\beta}_\lambda=\varphi(\overline{\alpha}_\lambda).$$

Bildet man nun die Gleichung:

$$(x-\overline{\beta}_1)\cdots(x-\overline{\beta}_\lambda)=(x-\varphi(\overline{\alpha}_1))\cdots(x-\varphi(\overline{\alpha}_\lambda))=0,$$

der die Zahlen $\overline{\beta}_i$ genügen, so ist ihre linke Seite als symmetrische Funktion aller Wurzeln $\overline{\alpha}_i$ der Gleichung $g(x)=0$ eine Funktion von x mit rationalen p-adischen Koeffizienten; also muß sie mit $f(x)$ identisch sein, weil diese irreduktibel ist und mit jener mindestens die Wurzel $\overline{\beta}_1$ gemeinsam hat. Hiermit ist die Zerlegung der Funktion $f(x)$ im Körper $K(p, \overline{\alpha}_0)$ völlig bewiesen; es folgt aus den allgemeinen Sätzen des § 1, daß die Gleichung $f(x)=0$ in dem Körper $K(p, \overline{\alpha}_0)$ außer $\overline{\beta}_1, \ldots \overline{\beta}_\lambda$ auch keine anderen Wurzeln besitzen kann; aus denselben Sätzen ergibt sich, daß dies die einzige Zerlegung von $f(x)$ in jedem Körper ist, welcher $K(p, \overline{\alpha}_0)$ als Teilkörper enthält. Die λ Wurzeln $\overline{\beta}_i$, welche die Gleichung $f(x)=0$ in dem Körper $K(p, \overline{\alpha}_0)$ besitzt, sind für den Bereich von p sämtlich voneinander verschieden, da anderenfalls die innerhalb $K(p)$ irreduktible Funktion $f(x)$ mit ihrer Ableitung für den Bereich von p einen gemeinsamen Teiler haben müßte.

Ich weise endlich nach, daß alle Auflösungskörper niedrigster Ordnung für eine und dieselbe Gleichung $f(x)=0$ äquivalent sind. Sind nämlich K und $\overline{K}$ zwei verschiedene Auflösungskörper für diese Gleichung, und sind

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_\lambda) \\ &= (x-\overline{\beta}_1)(x-\overline{\beta}_1)\cdots(x-\overline{\beta}_\lambda) \end{aligned} \qquad (11.)$$

die Zerlegungen ihrer linken Seite innerhalb K und $\overline{K}$, so kann man

wieder die rationalen Koeffizienten $b_1, b_2, \ldots b_\lambda$ auf unendlich viele Arten so wählen, daß die beiden p-adischen algebraischen Zahlen

$$\beta_0 = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots + b_\lambda\beta_\lambda,$$

$$\overline{\beta}_0 = b_1\overline{\beta}_1 + b_2\overline{\beta}_2 + \cdots + b_\lambda\overline{\beta}_\lambda$$

primitive Elemente bzw. von K und $\overline{K}$ sind. Diese Elemente sind bei geeigneter Numerierung der $\overline{\beta}_i$ einander äquivalent, denn die Koeffizienten der für den Bereich von p irreduktiblen Gleichungen, welchen β_0 und $\overline{\beta}_0$ genügen, hängen dann allein und beide Male in derselben Weise von den Koeffizienten b_i und den elementaren symmetrischen Funktionen der β_i und der $\overline{\beta}_i$ ab; sie sind also einander gleich, da jene symmetrischen Funktionen nach (11.) identisch sind. Umgekehrt ist es klar, daß alle zu einem Zerlegungskörper $K(p, \alpha_0)$ der Gleichung $f(x) = 0$ äquivalenten Körper $K(p, \overline{\alpha}_0)$ ebenfalls Zerlegungskörper derselben Gleichung sind.

Ist $K(p, \alpha_0)$ ein Zerlegungskörper der Grundgleichung, und ist

$$f(x) = (x-\beta_1)\,(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_\lambda)$$

die Zerlegung ihrer linken Seite in diesem Körper, so nenne ich die λ äquivalenten p-adischen algebraischen Zahlen λ-ter Ordnung *konjugierte Zahlen*, und die durch sie konstituierten p-adischen Körper $K(p, \beta_1), \ldots K(p, \beta_\lambda)$ *konjugierte Körper*. Aus der Äquivalenz dieser Körper folgt nach den in § 2 bewiesenen Sätzen, daß jede rationale Gleichung mit rationalen p-adischen Koeffizienten zwischen irgendwelchen Zahlen des Körpers $K(p, \beta_1)$ richtig bleibt, wenn man jene Zahlen durch ihre konjugierten bzw. innerhalb der Körper $K(p, \beta_2), \ldots K(p, \beta_\lambda)$ ersetzt. Ist γ_1 irgendeine Zahl des Körpers $K(p, \beta_1)$, und $h(x) = 0$ die Gleichung λ-ten Grades, welcher γ_1 genügt, so besteht innerhalb $K(p, \alpha_0)$ für ihre linke Seite die Zerlegung:

$$h(x) = (x-\gamma_1)\,(x-\gamma_2)\cdots(x-\gamma_\lambda),$$

wenn $\gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_\lambda$ die zu γ_1 konjugierten Zahlen bedeuten.

Sind allgemein $K(p, \eta_i)$ die zu $K(p, \beta_i)$ gehörigen konjugierten Koeffizientenkörper, und $\pi_1, \dots \pi_\lambda$ ein System konjugierter Primzahlen innerhalb jener Körper, so lassen sich die λ konjugierten Zahlen γ_i auf eine einzige Weise in konjugierte p-adische algebraische Reihen entwickeln:

$$\gamma_i = \eta_i^{(\varrho)} \pi_i^{\varrho} + \eta_i^{(\varrho+1)} \pi_i^{\varrho+1} + \cdots ;$$

sie bilden also einen Zyklus von γ konjugierten Reihen mit Koeffizienten, welche konjugierte Zahlen der λ konjugierten Koeffizientenkörper sind.

Mit Hilfe der so gefundenen Ergebnisse zeige ich nun, daß für eine beliebige im Körper $K(1)$ der gewöhnlichen rationalen Zahlen irreduktible Gleichung n-ten Grades:

$$F(x) = 0, \tag{12.}$$

durch deren Wurzeln die n gewöhnlichen algebraischen Körper $K(\overset{(i)}{\alpha})$ konstituiert werden, ein und, abgesehen von äquivalenten, auch nur ein Zerlegungskörper niedrigsten Grades $K(p, \overline{\delta})$ existiert, in welchem ihre linke Seite in ein Produkt von n p-adischen algebraischen Linearfaktoren zerfällt.

Zu diesem Zwecke denke ich mir die Funktion $F(x)$ in ihre irreduktiblen p-adischen Faktoren zerlegt, deren Anzahl gleich drei sein möge. Es sei

$$F(x) = f(x)\, g(x)\, h(x) \quad (p) \tag{12a.}$$

jene Zerlegung, λ, μ, ν mögen die Grade dieser Faktoren sein. Es seien nun

$$K(p, \alpha_1), \; K(p, \beta_1), \; K(p, \gamma_1)$$

Auflösungskörper für die p-adischen Gleichungen:

$$f(x) = 0, \; g(x) = 0, \; h(x) = 0, \tag{12b.}$$

und es mögen:

$$(13.) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\lambda;\ \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\mu;\ \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_\nu$$

die zu $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ konjugierten gewöhnlichen algebraischen Zahlen bedeuten. Ich setze nun:

$$(14.) \qquad \delta = a_1\alpha_1 + \cdots + a_\lambda\alpha_\lambda + b_1\beta_1 + \cdots + b_\mu\beta_\mu + c_1\gamma_1 + \cdots + c_\nu\gamma_\nu$$

und wähle wieder die rationalen Koeffizienten a_i, b_k, c_l so, daß δ eine primitive Zahl des durch die n Zahlen $\alpha_i, \beta_k, \gamma_l$ konstituierten *Galois*schen Körpers niedrigster Ordnung, daß also:

$$K(\delta) = K(\alpha_1, \ldots \beta_1, \ldots \gamma_1, \ldots)$$

ist; dann sind die n algebraischen Zahlen

$$(15.) \qquad \alpha_i = \chi_i(\delta),\ \beta_k = \psi_k(\delta),\ \gamma_l = \varrho_l(\delta) \qquad \begin{pmatrix} i = 1, \ldots \lambda \\ k = 1, \ldots \mu \\ l = 1, \ldots \nu \end{pmatrix}$$

rationale Funktionen von δ mit gewöhnlichen rationalen Koeffizienten.

Es sei nun wieder

$$H(x) = 0$$

die irreduktible Gleichung, der δ genügt, und $h(x)$ einer der irreduktiblen p-adischen Faktoren von $H(x)$. Ferner sei $K(p, \bar{\varepsilon})$ ein Auflösungskörper für die p-adische irreduktible Gleichung

$$h(x) = 0$$

und $\bar{\delta}$ eine Wurzel dieser Gleichung innerhalb $K(p, \bar{\varepsilon})$. Definiert man dann die $\lambda + \mu + \nu = n$ p-adischen Zahlen $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_k, \bar{\gamma}_l$ von $K(p, \bar{\varepsilon}) = K(p, \bar{\delta})$ durch die Gleichungen:

$$(15^{a}.) \qquad \bar{\alpha}_i = \chi_i(\bar{\delta}),\ \bar{\beta}_k = \psi_k(\bar{\delta}),\ \bar{\gamma}_l = \varrho_l(\bar{\delta}),$$

so zeigt man wörtlich wie a. S. 200—203, daß für die Funktion $F(x)$ innerhalb $K(p, \bar{\delta})$ die folgende Zerlegung in Linearfaktoren besteht:

$$(16.) \qquad F(x) = (x-\bar{\alpha}_1)\cdots(x-\bar{\alpha}_\lambda)\,(x-\bar{\beta}_1)\cdots(x-\bar{\beta}_\mu)\,(x-\bar{\gamma}_1)\cdots(x-\bar{\gamma}_\nu),$$

und zwar so, daß:

$$(16^{a}.) \qquad f(x) = \Pi(x-\bar{\alpha}_i),\ g(x) = \Pi(x-\bar{\beta}_k),\ h(x) = \Pi(x-\bar{\gamma}_l)$$

ist. Aus diesem Grunde soll $K(p, \bar{\delta})$ ein Zerlegungskörper für die Gleichung $F(x) = 0$ genannt werden. Man zeigt ferner genau ebenso wie a. S. 204, daß jeder andere Zerlegungskörper niedrigsten Grades für dieselbe Gleichung isomorph zu $K(p, \bar{\delta})$ ist.

In jedem dieser isomorphen Zerlegungskörper besitzt also die Gleichung $F(x) = 0$ genau n Wurzeln, welche die drei Zyklen

$$(\bar{\alpha}_1, \ldots \bar{\alpha}_\lambda)\ (\bar{\beta}_1, \ldots \bar{\beta}_\mu)\ (\bar{\gamma}_1, \ldots \bar{\gamma}_\nu)$$

von konjugierten Elementen bilden; eine Zahl dieses Körpers ist also dann und nur dann eine Wurzel unserer Gleichung, wenn sie einer dieser n p-adischen Zahlen $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_k, \bar{\gamma}_l$ für den Bereich von p gleich ist.

Jede andere Zahl $\overset{(1)}{\beta} = \varphi(\overset{(1)}{\alpha})$ des durch die Gleichung $F(x) = 0$ konstituierten Körpers $K(\overset{(1)}{\alpha})$ genügt mit ihren n Konjugierten ebenfalls einer Gleichung n-ten Grades $G(x) = 0$, deren linke Seite in demselben Zerlegungskörper $K(p, \bar{\delta})$ in gleicher Weise in ein Produkt:

$$G(x) = (x-\bar{\alpha}'_1)\cdots(x-\bar{\alpha}'_\lambda)\,(x-\bar{\beta}'_1)\cdots(x-\bar{\beta}'_\mu)\,(x-\bar{\gamma}'_1)\cdots(x-\bar{\gamma}'_\nu)$$

zerfällt wie die Grundgleichung; es ist also $K(p, \bar{\delta})$ ein Zerlegungskörper für alle Gleichungen der durch die Grundgleichung $F(x) = 0$ konstituierten

Körper $K(\overset{(s)}{\alpha})$. Ich nenne diese n p-adischen Reihen die Entwicklungen der algebraischen Zahl β für den Bereich von p. Diese Entwicklungen sind hiernach abgesehen von isomorphen, also äquivalenten Reihen eindeutig bestimmt. Da alle n p-adischen Zahlen $\overline{\alpha}_i'$, $\overline{\beta}_k'$, $\overline{\gamma}_l'$ einem und demselben Körper $K(p, \overline{\delta})$ angehören, so können sie untereinander und mit beliebigen anderen Reihen desselben Körpers durch die elementaren Rechenoperationen verbunden werden.

Auf dieser Grundlage ergibt sich nun die folgende Methode für die vollständige arithmetische Untersuchung aller Zahlen eines beliebigen algebraischen Körpers n-ter Ordnung $K(\alpha)$: Zu einer jeden reellen Primzahl p gehört ein, abgesehen von isomorphen, eindeutig bestimmter Zerlegungskörper $K(p, \overline{\delta})$, innerhalb dessen jede Zahl β jenes Körpers n eindeutig bestimmte Entwicklungen für den Bereich von p besitzt, welche sich von selbst in so viele Zyklen konjugierter Reihen sondern, als die Anzahl der für den Bereich von p irreduktiblen Faktoren der Grundgleichung beträgt. Die Zahlen eines und desselben Zyklus besitzen dieselbe Ordnungszahl, welche für alle isomorphen Zerlegungskörper die gleiche ist. Jedem dieser Zyklen ordne ich dann einen zu p gehörigen Primteiler $\mathfrak{p}$ zu und sage, die Zahl β ist genau durch $\mathfrak{p}^r$ teilbar, wenn der zu $\mathfrak{p}$ gehörige Wurzelzyklus von β die Ordnungszahl r hat. Hiermit ist die eindeutige Zerlegbarkeit aller Zahlen eines Körpers in Primfaktoren vollständig bewiesen.

Nach diesen Ergebnissen sind die Ausführungen im § 2 des siebenten Kapitels meiner Theorie der algebraischen Zahlen etwas zu modifizieren, während alle Ergebnisse desselben bestehen bleiben. Die Aufgabe, eine vorgelegte gewöhnliche Zahlengleichung $F(x) = 0$ für den Bereich einer Primzahl p in einem geeignet gewählten p-adischen Zerlegungskörper vollständig aufzulösen, oder ihre linke Seite in Linearfaktoren zu zerlegen, hat nämlich *abgesehen von äquivalenten Zerlegungskörpern* nur eine einzige Lösung. Sieht man aber von diesen äquivalenten Körpern nicht ab, so gibt es zwar für jede solche Gleichung unendlich viele Zerlegungskörper; nach den hier gegebenen Ausführungen ist es aber für die arithmetische Untersuchung der algebraischen Zahlen für den Bereich von p völlig gleichgültig, welchen unter diesen äquivalenten Körpern man für diese Zerlegung zugrunde

legt. Alle in diesem Buche auseinandergesetzten Resultate beruhen einzig und allein auf der Zerlegung der Grundgleichung in Linearfaktoren innerhalb *irgendeines* unter den äquivalenten Zerlegungskörpern. Zu diesem Körper $K(p, \overline{\delta})$ gehören dann die n konjugierten p-adischen Zahlen $\overline{\alpha}_i, \overline{\beta}_k, \overline{\gamma}_l$ in (15ª.), also sind auch die durch sie konstituierten konjugierten Körper Teilkörper von $K(p, \overline{\delta})$. Irgendwelche Zahlen aus diesen Körpern können also stets durch die elementaren Rechenoperationen miteinander verbunden werden, da bei diesen der Bereich des Zerlegungskörpers niemals verlassen wird.

Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen.

Von Herrn *E. Hellinger* in Marburg a. d. L.

Die Theorie der Integralgleichungen und die anschließenden neueren Untersuchungen sind von vornherein von dem Bestreben getragen worden, die Sätze der Algebra über lineare Gleichungssysteme und speziell zunächst einmal die Sätze über die orthogonale Transformation einer reellen quadratischen Form von n Veränderlichen auf eine Summe von n Quadraten in das Gebiet unendlichvieler Veränderlicher zu übertragen. Dabei besteht bei denjenigen Integralgleichungen, auf die sich die ersten grundlegenden Untersuchungen von Herrn *Hilbert**) bezogen, und die später von Herrn *Erh. Schmidt***) auf neue Art behandelt wurden, noch insofern völlige Analogie zur Algebra, als sich die den quadratischen Formen entsprechenden zugehörigen Doppelintegrale tatsächlich als Summe von höchstens abzählbar vielen Quadraten in einer jener orthogonalen Transformation völlig entsprechenden Weise darstellen ließen. Wesentlich darüber hinaus ging Herr *Hilbert* später***), indem er statt der Integralgleichungen direkt Gleichungen mit abzählbar unendlichvielen Unbekannten bezw. quadratische Formen unendlichvieler

*) „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen". 1. Mitteil., Nachr. d. K. Ges. d. W. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1904, S. 49.

**) „Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener". Dissert. Göttingen 1905. — Abgedruckt als 1. Abhandl. „Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen". Mathem. Ann. 63 (1907), S. 433.

***) „Grundzüge...". 4. Mitteil. Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Kl. 1906, S. 154. (Zitiert als „*Hilbert* IV"). — Vgl. auch 5. Mitteil., ebenda, S. 439 („*Hilbert* V").

Veränderlicher betrachtete und hier die Theorie einer wesentlich umfassenderen Klasse von Formen („beschränkte" Formen) entwickeln konnte; hier treten nämlich Formen auf, die eine orthogonale Transformation auf eine *Summe abzählbar vieler Quadrate* nicht mehr gestatten, wohl aber eine ganz analoge kanonische Darstellung durch ein gewisses *Integral*, also gewissermaßen durch eine Summe von kontinuierlich vielen Summanden. Das Integrationsgebiet dieses Integrales (also ein *Kontinuum* von Zahlen) tritt demgemäß als neue Invariante zu den abzählbar unendlichvielen im vorhergehenden Falle allein das Invariantensystem bildenden „Eigenwerten" (das sind die Koeffizienten der einzelnen Quadrate in der Quadratsumme) hinzu. Ich habe in meiner Dissertation*) auf den *Hilbert*schen Resultaten fußend die Frage nach dem *vollständigen* Invariantensystem jener Klasse quadratischer Formen erörtert und die notwendigen und hinreichenden Kriterien dafür angegeben, wann zwei quadratische Formen unendlichvieler Veränderlicher orthogonal ineinander transformierbar sind.

Es entsteht nun die Frage, ob man nicht diese Resultate und damit die gesamte Theorie der beschränkten Formen in direkter Weise unabhängig von der *Hilbert*schen Theorie ableiten kann, d. h. insbesondere unabhängig von dem bei *Hilbert* den springenden Punkt bildenden Grenzübergang aus dem algebraischen Gebiete und den dabei naturgemäß erforderlichen schwierigen Konvergenzbetrachtungen. Eine solche neue Begründung der Theorie gebe ich in der vorliegenden Arbeit; sie hat zugleich den Vorzug, wie ich in einer folgenden Abhandlung des näheren darzulegen gedenke, daß sie ihrem Wesen nach unabhängig davon ist, ob die zu behandelnde quadratische Form durch eine *Summe* als Funktion abzählbar unendlichvieler Veränderlicher, oder durch ein *Integral* als Funktion einer integrierbaren Funktion gegeben ist — d. h. daß sie im wesentlichen unverändert auch die Theorie von *Integralgleichungen* mit unstetigen Kernen (denn solche entsprechen im allgemeinen den beschränkten quadratischen Formen) liefert**).

---

*) „Die Orthogonalinvarianten quadratischer Formen von unendlichvielen Variabelen." Göttingen 1904.

**) Solche Kerne hat Herr *E. Hilb* (Math. Ann. 66 (1908), S. 1) für eine Reihe typischer aus Differentialgleichungen entspringender Fälle durch Grenzübergang von stetigen Kernen aus behandelt; etwa gleichzeitig hat Herr *H. Weyl* („Singuläre Integral-

Im ersten Kapitel behandle ich die Eigenwerte der quadratischen Form K, von ihrer bekannten Definition mit Hilfe der zur Formenschar $K-\lambda E$ (wo E die Einheitsform und λ ein Parameter ist) gehörigen homogenen Gleichungen ausgehend, in analoger Weise, wie es Herr *E. Schmidt* in seiner genannten Dissertation für Integralgleichungen mit stetigem Kern getan hat. Um in ähnlicher Weise auf das Streckenspektrum zu kommen, verwende ich im zweiten Kapitel systematisch solche Lösungssysteme derselben homogenen Gleichungen, für die nicht mehr die Quadratsumme der abzählbar vielen Unbekannten selbst, sondern die ihrer Integrale nach dem Parameter λ konvergiert; da jedoch nur die *Integrale* dieser Lösungen eine orthogonalen Transformationen gegenüber unabhängige Existenz haben, so müssen vorzugsweise diese betrachtet werden, und statt der Lösungen selbst erscheinen die bereits in meiner Dissertation eine wichtige Rolle spielenden „*Differentiallösungen*". Aus diesen Betrachtungen ergibt sich die kanonische, alle Orthogonalinvarianten der Form liefernde Darstellung, — vorausgesetzt, daß zu *jeder nicht identisch verschwindenden Form entweder Lösungen der einen Art (Eigenwerte) oder solche der andern Art (Streckenspektrum) existieren.* Diesen fundamentalen Existenzsatz beweise ich im dritten Kapitel in einfacher, direkter Weise, indem ich die mit Hilfe eines von Herrn *E. Hilb**) herrührenden Verfahrens für komplexe Parameterwerte ν gebildete reziproke Form der Form $K-\nu E$ an die reelle Achse heran verfolge und aus der Untersuchung der Singularitäten, die sie dort notwendig besitzen muß, jene ausgezeichneten Lösungen herleite; dabei kommt aus der Theorie der analytischen Funktionen nur der *Cauchy*sche Integralsatz für durchaus regulär begrenzte, ganz im Regularitätsbereich der Funktion liegende Bereiche zur Anwendung.

---

gleichungen ..." Diss. Göttingen 1908) den einfachen Fall regulärer einfacher Spektren durch Übertragung der Resultate der *Hilbert*schen 4. Mitt. mittels eines Systemes von Orthogonalfunktionen behandelt. Mit dem gleichen Hilfsmittel hat dann Herr *Weyl* gelegentlich der Wiedergabe seiner Dissertation (Math. Ann. 66 (1908), S. 273) eine allgemeine Theorie aus den Ergebnissen meiner Dissertation abgeleitet; Herr *M. Plancherel* (Riv. di Fis. Mat. (Pavia) X (1909), S. 37) hat durch Benutzung des *Riesz-Fischer*schen Satzes diesen Übergang vereinfacht.

*) „Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten." Sitzungsber. d. Phys.-Med. Societ. in Erlangen. 40 (1908), S. 84.

Kapitel I.

Untersuchung des Punktspektrums.

§ 1.

Fundamentaleigenschaften linearer und quadratischer Formen unendlichvieler Veränderlicher.

Es sollen hier zunächst eine Reihe einfacher Begriffsbildungen und Konvergenzeigenschaften ohne Beweis kurz zusammengestellt werden, die in unsern Betrachtungen gebraucht werden und für ihr Verständnis nötig sind; sie entstammen zumeist der vierten Mitteilung *Hilberts**) und sind seither vielfach angewendet worden.

Definitionen: Eine *lineare Form* der abzählbar unendlichvielen Variablen $x_1, x_2, \ldots$

$$L(x) = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \cdots = \sum_{(p)} l_p x_p \text{ **)}$$

bzw. eine *bilineare Form* zweier Reihen solcher Veränderlicher $x_1, x_2, \ldots$ und $y_1, y_2, \ldots$

$$A(x, y) = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p y_q$$

heißt *beschränkt*, wenn jeder „n-te Abschnitt“

$$\sum_{p=1,\ldots n} l_p x_p \quad \text{bzw.} \quad \sum_{p,q=1,\ldots n} a_{pq} x_p y_q$$

für jedes den Ungleichungen

$$(1.) \qquad \sum_{(p)} x_p^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots \leqq 1, \quad \sum_{(p)} y_p^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots \leqq 1$$

genügende Wertsystem der Variablen dem absoluten Werte nach unterhalb einer endlichen, von n unabhängigen Grenze bleibt. Diese Definitionen

---

*) *Hilbert* IV, S. 176—182.

**) In den mit $\sum_{(p)}$ bezw. $\sum_{(p,q)}$ bezeichneten Summen sollen die Indizes p und q stets unabhängig voneinander alle ganzzahligen Werte 1, 2, ... durchlaufen.

gelten auch bei komplexen Koeffizienten und Variablen, wenn man diese nur der Konvergenzbedingung

$$(\bar{1}.) \qquad \sum_{(p)} |x_p|^2 = \sum_{(p)} x_p \bar{x}_p \leqq 1, \quad \sum_{(p)} |y_p|^2 = \sum_{(p)} y_p \bar{y}_p \leqq 1$$

an Stelle von (1.) unterwirft*).

Das Haupthilfsmittel bei den übrigens sehr einfachen Beweisen der nunmehr aufzuführenden Konvergenzsätze ist die sog. „*Schwarzsche Ungleichung*“**), die für reelle Größen

$$(2.) \qquad \left(\sum_{(p)} x_p y_p\right)^2 \leqq \sum_{(p)} x_p^2 \cdot \sum_{(p)} y_p^2$$

und für komplexe Größen***)

$$(\bar{2}.) \qquad \left|\sum_{(p)} x_p y_p\right|^2 \leqq \sum_{(p)} |x_p|^2 \cdot \sum_{(p)} |y_p|^2$$

lautet und zugleich die Konvergenz der links stehenden Summen als Folge der Konvergenz der rechts auftretenden Quadratsummen behauptet.

Linearformen: Eine Linearform $L(x)$ ist stets dann und nur dann beschränkt, wenn die Quadratsumme $\sum_{(p)} |l_p|^2$ der Beträge der Koeffizienten (bei reellen l_p also $\sum_{(p)} l_p^2$ selbst) konvergiert. Die Reihe $\sum_{(p)} l_p x_p$ konvergiert in diesem Falle wegen der aus (2.) sich für ihren Rest sofort ergebenden Abschätzung absolut und gleichmäßig für alle (1.) bezw. ($\bar{1}$.) genügenden Wertsysteme; insbesondere folgt hieraus, falls $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots$ für $n = 1, 2, \ldots$ unendlichviele ($\bar{1}$.) genügende Wertsysteme bedeuten, für die der Limes

$$\lim_{n=\infty} x_p^{(n)} = x_p$$

für jedes einzelne p existiert, daß

*) $\bar{x}_p$ bedeutet stets den konjugiert imaginären Wert von x_p.

**) *Hilbert* IV, S. 176.

***) *E. Schmidt*, „Über die Auflösung linearer Gleich. mit unendl. vielen Unbek.“ Rendic. del Circ. mat. di Palermo. XXV (1908), S. 58.

$$(3.) \qquad \mathop{L}_{n=\infty} \sum_{(p)} l_p x_p^{(n)} = \sum_{(p)} l_p x_p$$

ist, d. h. die Linearform besitzt als Funktion der unendlichvielen Variablen die hierin ausgesprochene Stetigkeitseigenschaft (die sog. „*Vollstetigkeit*“)*). Dieselben Aussagen gelten offenbar auch, wenn man Koeffizienten und Variable vertauscht; speziell sei hervorgehoben, daß für eine von einem Parameter λ abhängige Schar beschränkter Linearformen $\sum_{(p)} l_p(\lambda) x_p$ die sie darstellende Reihe auch gleichmäßig in λ konvergiert, wofern nur ihr Wert $L(\lambda, x)$ bezw. die Größe $\sum_{(p)} l_p(\lambda)^2$ eine auch von λ unabhängige obere Schranke hat.

Bilinearformen: Eine beschränkte Bilinearform $A(x, y)$ konvergiert im allgemeinen nur im gebräuchlichen Sinne der Doppelreihenkonvergenz, sowie bei zeilen- und kolonnenweiser Summation — und zwar allemal gegen denselben Wert:

$$(4.) \qquad A(x, y) = \mathop{L}_{n=\infty} A_n(x, y) = \mathop{L}_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} \sum_{\substack{p=1,\dots m \\ q=1,\dots n}} a_{pq} x_p y_q = \sum_{(p)} \left(\sum_{(q)} a_{pq} x_p y_q \right)$$

— vorausgesetzt natürlich immer, daß die Variablen der Bedingung (1.) genügen**). In jedem Falle aber ergibt sich**), daß der Rest der Reihe unter dem Produkte von $\sqrt{x_{m+1}^2 + x_{m+2}^2 + \cdots} + \sqrt{y_{n+1}^2 + y_{n+2}^2 + \cdots}$ in eine nur von der oberen Grenze aller Werte $|A(x, y)|$ abhängige Zahl bleibt. Demzufolge hat A als simultane Funktion der beiden Variablenreihen $x_1, x_2, \dots$ und $y_1, y_2, \dots$ betrachtet im allgemeinen nicht mehr die „*Vollstetigkeitseigenschaft*“ (3.)***), sondern es gilt

$$\mathop{L}_{n=\infty} A(x^{(n)}, y^{(n)}) = A(x, y), \text{ wenn } \mathop{L}_{n=\infty} x_p^{(n)} = x_p, \mathop{L}_{n=\infty} y_p^{(n)} = y_p,$$

nur noch dann, wenn gleichzeitig die „Entfernungen“

*) *Hilbert* IV, S. 200. — V, S. 441.

**) *Hilbert* IV, S. 178, 180.

***) Daraus folgt speziell, daß $A(x, y)$ die obere Schranke seines Wertevorrates im Bereiche (1.) nicht mehr an einer Stelle dieses Bereiches anzunehmen braucht.

$$\lim_{n=\infty} \sum_{(p)} (x_p^{(n)} - x_p)^2 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} \sum_{(p)} (y_p^{(n)} - y_p)^2 = 0$$

gegen Null konvergieren. Andererseits aber bleibt, wenn wir für ein festes Wertsystem der x und y die Werte einer einparametrigen Formenschar $A(\lambda; x, y) = \sum_{(p,q)} a_{pq}(\lambda) x_p y_q$ betrachten, die gleichmäßige Konvergenz der darstellenden Reihe für alle λ bestehen, wofern nur $A(\lambda; x, y)$ eine von λ unabhängige endliche obere Schranke hat.

Faltungsprozesse: Unter der *Faltung* zweier beschränkter Linearformen $L(x)$, $M(x)$ verstehen wir die wegen (2.) notwendig existierende Zahl:

$$(4.) \qquad (L, M) = L(\cdot) M(\cdot) = \sum_{(p)} l_p m_p .$$

In ähnlicher Weise kann man aus $L(x)$ und einer beschränkten Bilinearform $A(x, y)$ zwei im allgemeinen verschiedene Faltungen bilden, die ihrerseits beschränkte Linearformen sind:

$$(5.) \qquad \begin{cases} A(x, \cdot)\, L(\cdot) = AL(x) = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p l_q , \\ A(\cdot, y)\, L(\cdot) = LA(y) = \sum_{(p,q)} a_{pq} l_p y_q . \end{cases}$$

Ist $A(x, y)$ speziell dem Produkte zweier Linearformen $M(x) N(y)$ gleich, so ist

$$(5^a.) \quad A L(x) = M(x)(N, L); \quad L A(y) = (L, M) N(y), \quad \text{wo} \quad A = M(x) N(y).$$

Endlich geht aus zwei beschränkten Bilinearformen $A(x, y)$ und $B(x, y)$ als „Faltung“ eine neue notwendig wiederum beschränkte Bilinearform hervor*):

$$(6.) \qquad A(x, \cdot) B(\cdot, y) = AB(x, y) = \sum_{(p,q)} \Big(\sum_{(\alpha)} a_{p\alpha} b_{\alpha q} \Big) x_p y_q ,$$

die wir in der Sprache des Matrizenkalküls, wo für jede Bilinearform, bezw. das System ihrer Koeffizienten, ein Buchstabe $A = (a_{pq})$ gesetzt wird, auch

*) *Hilbert* IV, S. 178 f.

als *Produkt AB von A und B* bezeichnen werden; ihr Wert kann auch als

$$(6^{a}.) \qquad AB(x,y) = \sum_{(a)} \left(\sum_{(p)} a_{pa} x_p \right) \left(\sum_{(q)} b_{aq} y_q \right)$$

dargestellt werden. Bezeichnen M und N die Maxima bezw. die oberen Schranken der absoluten Beträge der Formen A und B unter der Nebenbedingung (1.), so gilt unter derselben Bedingung

$$(6^{b}.) \qquad |AB(x,y)| \leqq M N.$$

Für alle diese Faltungsprozesse gilt das *„assoziative Gesetz"*, insbesondere sei hervorgehoben:

$$(7^{a}.) \qquad (M, AL) = (MA, L)$$

$$(7^{b}.) \qquad (AB)C = A(BC).$$

Quadratische Formen: Jeder reellen symmetrischen Bilinearform ($a_{pq} = a_{qp}$) gehört die *quadratische Form*

$$A(x,x) = A(x) = \sum_{(p,q)} a_{pq} x_p x_q \quad (a_{pq} = a_{qp})$$

zu, aus der $A(x,y)$ umgekehrt durch „Polarisierung" entsteht; die obere Schranke der Beträge der quadratischen Form ist mit derjenigen der symmetrischen Bilinearform — immer unter der Nebenbedingung (1.) — identisch. Zu jeder reellen unsymmetrischen Bilinearform $A(x,y)$ kann man mit Hilfe der *„transponierten Form"*

$$(8.) \qquad A'(x,y) = \sum_{(p,q)} a_{qp} x_p y_q = A(y,x)$$

eine gewisse quadratische positiv definite Form

$$(8^{a}.) \qquad A'A(x) = \sum_{(p,q,a)} a_{ap}\, a_{aq}\, x_p\, x_q = \sum_{(a)} \Big(\sum_{(q)} a_{aq}\, x_q\Big)^2 \geqq 0$$

bilden. Ist A symmetrisch, so ist $A'A = A^2$ die Faltung von A mit sich selbst, und ebenso sind alle Faltungen $A^4, A^6, \ldots$ positiv definit; ist A selbst definit, so sind auch die Selbstfaltungen ungerader Ordnung $A^3, A^5, \ldots$ definit, da sie nur Werte aus dem Wertevorrat von $A(x)$ selbst annehmen.

Bei komplexen Koeffizienten haben die durch die Bedingung

$$a_{pq} = \bar{a}_{qp} \quad \text{oder} \quad A = \bar{A}'$$

(wo $A(x, y) = \sum_{(p,q)} \bar{a}_{pq}\, x_p\, y_q$ gesetzt ist) charakterisierten „*Hermiteschen Formen*“ eine ähnliche Bedeutung*); setzt man x_p und y_p einander konjugiert komplex, so nehmen sie wieder reelle Werte an:

$$A(x, \bar{x}) = \sum_{(p)} a_{pp} |x_p|^2 + \sum_{(p \neq q)} (a_{pq}\, x_p\, \bar{x}_q + \bar{a}_{pq}\, \bar{x}_p\, x_q).$$

Aus jeder komplexen Form $A(x, y)$ kann man eine positiv definite *Hermite*sche Form bilden:

$$(9.) \qquad \bar{A}'A(x) = \sum_{(p,q,a)} \bar{a}_{ap}\, a_{aq}\, \bar{x}_p\, x_q = \sum_{(a)} \Big|\sum_{(q)} a_{aq}\, x_q\Big|^2 \geqq 0;$$

wir bemerken noch die aus $(\bar{2}.)$ folgende Ungleichung:

$$(9^{a}.) \qquad |A(x, y)|^2 \leqq \bar{A}'A(y) \quad \text{für} \quad \sum_{(p)} |x_p^2| = 1.$$

Orthogonale Formen**): Ein System reeller Linearformen

$$L_p(x) = \sum_{(q)} l_{pq}\, x_q$$

---

*) *Hilbert* IV, S. 216.

**) *Hilbert* IV, S. 180f., 194f.

heißt *orthogonal* (genauer: orthogonal und normiert), wenn für je zwei von ihnen gilt:

$$(10.) \qquad (L_p, L_q) = \sum_{(a)} l_{pa} l_{qa} = \delta_{pq} = \begin{cases} 0 \text{ für } p \neq q \\ 1 \text{ für } p = q; \end{cases}$$

jede dieser Formen ist dann notwendig beschränkt. Denkt man sich ihre Koeffizienten etwa als Koordinaten eines Vektors im unendlichvieldimensionalen Raume der $x_1, x_2, \ldots$, so stehen alle diese Vektoren aufeinander orthogonal*). — *Für jedes Wertsystem x mit konvergenter Quadratsumme konvergiert die Quadratsumme beliebig vieler Orthogonalfunktionen und bleibt kleiner als* $\sum_{(p)} x_p^2$ (*„Besselsche Ungleichung“*)**):

$$(11.) \qquad \sum_{(p)} (L_p(x))^2 = L_1(x)^2 + L_2(x)^2 + \cdots \leqq \sum_{(p)} x_p^2;$$

die linke Seite stellt eine beschränkte, übrigens positiv definite quadratische Form der unendlichvielen Variablen $x_1, x_2, \ldots$ dar.

Hat man irgend ein System von Orthogonalfunktionen, über dessen Mächtigkeit noch nichts bekannt ist, so gilt für jede Anzahl von ihnen doch die Ungleichung (11.) und daher durch Spezialisierung der Variablen auch jede der Ungleichungen

$$\sum_{(p)} l_{pq}^2 \leqq 1. \qquad (q = 1, 2, \ldots)$$

Daraus folgt für jedes einzelne q, daß höchstens 2 der Größen $l_{1q}, l_{2q}, \ldots$ größer als $\frac{1}{2}$, höchstens 3 größer als $\frac{1}{3}$ sein können und so fort, also schließlich, daß nur abzählbar unendlichviele von ihnen von Null verschieden sein können. Da es aber nur abzählbar unendlichviele Indexwerte $q = 1, 2, \ldots$ gibt — entsprechend den abzählbar unendlichvielen Variablen $x_1, x_2, \ldots$ —, können auch in dem Schema *aller* Koeffizienten l_{pq} nur abzählbar viele von 0 verschiedene Größen vorhanden sein, und somit ist be-

*) Komplexe Linearformen heißen orthogonal, wenn $(L_p, \bar{L}_q) = 0$ (*E. Schmidt*, „Über die Auflösung…“; zitiert S. 214 Anm. ***).

**) *Erh. Schmidt*, Dissert. § 1. — *Hilbert* IV, S. 195.

wiesen, daß *jedes System normierter orthogonaler Linearformen abzählbar unendlichvieler Variabler höchstens abzählbar unendlichviele Formen enthalten kann**).

Gilt nun speziell für ein Orthogonalsystem die *Gleichung*

$$(11'.) \qquad L_1(x)^2 + L_2(x)^2 + \cdots = \sum_{(p)} x_p^2,$$

so heißt es *vollständig*; jedes Orthogonalsystem kann man zu einem vollständigen durch Hinzufügung geeigneter Formen ergänzen**). Aus (11′.) folgt nun:

$$(10'.) \qquad \sum_{(a)} l_{ap} l_{aq} = \delta_{pq} = \begin{cases} 0 \text{ für } p \neq q \\ 1 \text{ für } p = q, \end{cases}$$

das sind die aus (10.) durch Vertauschung von Zeilen und Kolonnen im Koeffizientenschema $L = (l_{pq})$ hervorgehenden Gleichungen. Man kann beide Gleichungssysteme in der Matrizensymbolik zusammenfassen in

$$(10^{a}.) \qquad LL' = E, \quad L'L = E,$$

wenn E die „*Einheitsform*“

$$E(x) = \sum_{(p,q)} \delta_{pq} x_p x_q = \sum_{(p)} x_p^2$$

bedeutet. Auch die Bilinearform $L = \sum_{(p,q)} l_{pq} x_p y_q$ heißt orthogonal; sie ist notwendig beschränkt.

Wegen (10.) und (10′.) lösen die Gleichungssysteme

---

*) Der Beweis ist identisch mit dem von Herrn *E. Schmidt* (Comptes Rendus de l'acad. des sciences. Paris. T. 143 (1906), S. 955 für Orthogonalsysteme von Funktionen einer Variablen geführten.

**) *Hilbert* IV, S. 196.

$$(12.) \qquad x'_p = L_p(x) = \sum_{(q)} l_{pq} x_q,$$

$$(12'.) \qquad x_q = L'_q(x') = \sum_{(p)} l_{pq} x'_p$$

(das sind die zu den Bilinearformen L und L' gehörigen linearen Transformationen) sich gegenseitig auf und vermitteln daher eine umkehrbar eindeutige Transformation des unendlichvieldimensionalen Raumes der Punkte mit konvergenter Quadratsumme der Koordinaten. Diese Transformation ist obendrein wegen (11'.) *orthogonal*, d. h. sie führt die Einheitsform in sich selbst über:

$$\sum_{(p)} x_p^2 = \sum_{(p)} x_p'^2 \text{ oder } E(x) = E(x');$$

umgekehrt ist jede eineindeutige orthogonale lineare Substitution in der Form (12.), (12'.) enthalten.

Die oben definierten Faltungsprozesse sind gegenüber orthogonalen Transformationen kovariant*), d. h. gehen durch (12.) die linearen oder bilinearen Formen $M, A, \ldots$ über in die notwendig gleichfalls beschränkten Formen:

$$M^*(x') = LM(x') = \sum_{(a)} \Big(\sum_{(p)} l_{ap} m_p \Big) x'_a,$$

$$A^*(x') = LAL'(x') = \sum_{(\alpha, \beta)} \Big(\sum_{(p, q)} l_{ap} k_{pq} l_{\beta q} \Big) x'_a x'_\beta, \ \ldots,$$

so geben sie gefaltet einfach die transformierten Formen der durch den gleichen Faltungsprozeß aus $L, A, \ldots$ entstehenden Formen, z. B.:

$$(13.) \qquad A^* M^* = (AM)^*, \quad A^* B^* = (AB)^*.$$

§ 2.

Eigenformen der quadratischen Form.

Wir beginnen nunmehr das Studium der *reellen beschränkten quadratischen Form unendlichvieler Veränderlicher*, die wir

*) *Hilbert* IV, S. 181.

$$K(x) = \sum_{(p,q)} k_{pq} x_p x_q \qquad (k_{pq} = k_{qp})$$

schreiben*). Durch orthogonale Transformationen geht sie in andere quadratische Formen über, und es handelt sich besonders darum, die sämtlichen Invarianten von K gegenüber allen orthogonalen Transformationen anzugeben bezw. eine durch orthogonale Transformationen stets zu erzielende eindeutig bestimmte Normalform für K aufzustellen, aus der sich diese Invarianten ablesen lassen.

Genau wie in der Algebra (d. h. im Falle endlichvieler Variabler) betrachten wir zu diesem Ende die *Formenschar***)

$$A(x) = K(x) - \lambda E(x),$$

wo E die die orthogonalen Transformationen charakterisierende Einheitsform und λ ein Parameter ist, und gehen von der allgemeinen, natürlich noch wesentlich zu präzisierenden Bemerkung aus, *daß alle Werte λ, für die die Form A einen ausgezeichneten, orthogonalen Transformationen gegenüber unveränderlichen Charakter hat, orthogonale Invarianten von K sein werden.* Eine solche ausgezeichnete Eigenschaft, die ganz ebenso in der Algebra auftritt, ist z. B. — wie aus der Schlußbemerkung von § 1 hervorgeht — die *Existenz einer beschränkten „reziproken Form“* $\mathsf{K}(\lambda; x)$ *zu* A, d. h. einer Form, deren Produkt (Faltung) mit A gleich der Einheitsform ist:

$$A\mathsf{K}(x) = \sum_{(p,q,a)} a_{pa} \varkappa_{aq} x_p x_q = E(x),$$

— oder andererseits die *Existenz einer „Nulllösung“*, d. h. einer beschränkten Linearform $M(x)$, deren Faltung mit A identisch verschwindet:

$$AM(x) = 0.$$

---

*) Es sei hier nur beiläufig bemerkt, daß sich die ganzen folgenden Entwicklungen im wesentlichen unverändert auch auf *Hermite*sche Bilinearformen anwenden lassen.

**) Herr *Hilbert* betrachtet entsprechend der bei Integralgleichungen üblichen Bezeichnungsweise die Schar $E - \lambda K$; seine Eigenwerte etc. sind also die reziproken Werte der im folgenden auftretenden.

Man kann das auch so ausdrücken: Im ersten Falle haben die zur Form A gehörigen *unhomogenen linearen Gleichungen* mit unendlichvielen Unbekannten

$$\sum_{(q)} a_{pq} x_q = y_p \text{ oder } \sum_{(p)} k_{pq} x_q - \lambda x_p = y_p \qquad (p=1, 2, \ldots)$$

für jedes System der Größen y_p mit konvergenter Quadratsumme eine *eindeutig bestimmte Lösung mit konvergenter Quadratsumme:*

$$x_p = \sum_{(q)} \varkappa_{pq} y_q; \qquad (p=1, 2, \ldots)$$

im zweiten Falle haben die *homogenen Gleichungen*

$$(1.) \qquad \sum_{(q)} a_{pq} x_q = 0 \text{ oder } \sum_{(q)} k_{pq} x_q - \lambda x_p = 0 \qquad (p=1, 2, \ldots)$$

eine von der trivialen Lösung $x_p = 0$ verschiedene Lösung $x_p = m_p$ mit konvergenter Quadratsumme der absoluten Beträge.

Man bestätigt hiernach leicht auch direkt, daß für einen bestimmten Wert von λ bei den zu einer orthogonal transformierten Form gehörigen Gleichungen stets derselbe Fall eintritt, wie hier bei der ursprünglichen Form, und zwar entstehen die betr. neuen Lösungen durch die gleiche orthogonale Transformation aus den Lösungen der ursprünglichen Gleichungen.

Wie in der Algebra stellt Fall I den „allgemeinen Fall“ dar, auf den wir erst später zurückkommen werden, nachdem wir uns mit den „Ausnahmewerten“ λ beschäftigt haben; zu diesen gehört, wie sich zeigen wird, außer dem Fall II noch eine wesentlich verschiedene in der Algebra noch nicht auftretende Klasse von λ-Werten.

Wir behandeln nun also zunächst die durch (1.) definierten sog. *Eigenwerte der Form K.* Es sollen hier nur einige allgemeine Eigenschaften dieser Eigenwerte abgeleitet, nicht etwa ihre Existenz bewiesen werden; denn die allgemeine beschränkte Form, die wir hier behandeln, muß nicht notwendig Eigenwerte haben. Die Methoden, die ich hierbei zunächst

anwende, sind wesentlich dieselben, wie sie bei der direkten Untersuchung von Integralgleichungen mit stetigen Kernen, die ja gewissen speziellen quadratischen Formen entsprechen, schon früher gebraucht worden sind*).

Ich zeige zunächst, *daß jeder Eigenwert einer reellen quadratischen Form reell ist.* Denn multiplizieren wir (1.) mit dem zu $x_p = \xi_p + i\eta_p$ konjugiert komplexen Wert $\bar{x}_p = \xi_p - i\eta_p$ und summieren über p, so folgt

$$\sum_{(p,q)} k_{pq}\bar{x}_p x_q = \lambda \sum_{(p)} \bar{x}_p x_p;$$

rechts ist jeder Term der Summe reell, links aber ist wegen der Realität von k_{pp} jeder Term mit $p = q$ und wegen $k_{pq} = k_{qp}$ auch die Summe je zweier symmetrischer Terme $k_{pq}(\bar{x}_p x_q + \bar{x}_q x_p)$ reell, so daß wir

$$\sum_{(p,q)} (k_{pq}\xi_p\xi_q + k_{pq}\eta_p\eta_q) = \lambda \sum_{(p)} (\xi_p^2 + \eta_p^2)$$

und damit λ als reellen Quotienten zweier reeller Zahlen erhalten. Da hier nur Werte der Form K für reelle Variable auftreten, folgt weiterhin noch unmittelbar, *daß der Betrag jedes Eigenwertes unterhalb des Maximums von $K(x)$ für alle reellen, $\sum_{(p)} x_p^2 \leqq 1$ genügenden Wertsysteme liegt.*

Wir können uns darauf beschränken, zu jedem Eigenwerte λ ausschließlich *reelle* Lösungssysteme x_p der Gleichungen (1.) zu betrachten; denn wegen der Realität von λ und k_{pq} genügt sowohl der reelle als auch der mit i multiplizierte Teil einer eventl. komplexen Lösung von (1.) auch für sich diesen Gleichungen. Es ist bequem, mit jeder Lösung $x_p = m_p$ von konvergenter Quadratsumme zugleich auch die notwendig *beschränkte Linearform* $M(x) = \sum_{(p)} m_p x_p$ der unendlichvielen Variablen x_p zu betrachten, die eine *zum Eigenwert λ gehörige Eigenform von $K(x)$* heißt. Wir schreiben demgemäß statt der unendlichvielen Gleichungen

$$\sum_{(q)} k_{pq} m_q = \lambda m_p \qquad (p=1,2,\ldots)$$

auch die eine Identität in den unendlichvielen Variablen $x_1, x_2, \ldots$:

$$(2.) \qquad KM(x) = \lambda M(x) \text{ oder kürzer } KM = \lambda M.$$

*) Vgl. *E. Schmidt*, Dissertation, § 4 und 5.

Wegen der Homogeneität der Gleichungen (2.) kann man jede Eigenform $M(x)$ mit einem beliebigen konstanten Faktor multiplizieren; speziell kann man durch Division mit $\sqrt{(M, M)} = \sqrt{\sum_{(p)} m_p^2}$ die zu M gehörige *„normierte Eigenform"*

$$L(x) = \frac{M(x)}{\sqrt{(M, M)}}$$

bilden, die durch die Bedingung

$$(L, L) = 1$$

charakterisiert ist.

Um nun die *Gesamtheit der wesentlich verschiedenen Eigenformen* übersehen zu können, die möglicherweise zu ein und demselben zunächst *ungleich* 0 angenommenen Eigenwert λ gehören, gehen wir von irgendeiner normierten Eigenform $L_1(x)$ aus, die also

$$(a_1.) \qquad K L_1 = \lambda L_1, \text{ und } (L_1, L_1) = 1$$

genügt, und bilden die quadratische Form

$$(b_1.) \qquad K_1(x) = K(x) - \lambda (L_1(x))^2.$$

Sie hat sicher L_1 nicht mehr zur Eigenform mit dem Eigenwert λ, denn es ist (vgl. § 1, (5ª.)) wegen $(a_1.)$:

$$(c_1.) \qquad K_1 L_1(x) = K L_1(x) - \lambda L_1(x)(L_1, L_1) = 0.$$

Nun kann aber K_1 doch noch den gleichen Eigenwert λ mit einer anderen normierten Eigenform $L_2(x)$ haben:

$$(a_2.) \qquad K_1 L_2(x) = \lambda L_2, \quad \text{wo} \quad (L_2, L_2) = 1.$$

Indem wir diese Identität mit L_1 falten, erhalten wir

$$(L_1, K_1 L_2) = \lambda (L_1, L_2);$$

nun ist die linke Seite nach dem assoziativen Gesetze (7ª.) des § 1 gleich $(L_1 K_1, L_2)$, und da auch $K_1(x)$ als quadratische Form eine symmetrische Form ist, folgt (vgl. (5.) des § 1) $L_1 K_1(x) = K_1 L_1(x)$ und das verschwindet wegen (c_1.) identisch; daher wird auch $(L_1, K_1 L_2) = 0$ und mithin wegen $\lambda \neq 0$ auch

$$(L_1, L_2) = 0.$$

Damit und mit Hilfe von (a_2.) ergibt sich nun, wenn man die Identität (b_1.) mit L_2 faltet:

$$\lambda L_2 = K L_2(x),$$

d. h. auch L_2 gehört als Eigenform zum Eigenwert λ. Bildet man nun weiter

$$(b_2.) \qquad K_2(x) = K_1(x) - \lambda L_2(x)^2 = K(x) - \lambda L_1(x)^2 - \lambda L_2(x)^2,$$

so folgt genau ebenso

$$K_2 L_1(x) = K_2 L_2(x) = 0;$$

aber es kann K_2 möglicherweise eine andere zu λ gehörige normierte Eigenform $L_3(x)$ haben, die dann notwendig wiederum eine zu L_1 und L_2 orthogonale Eigenform von $K(x)$ ist:

$$K L_3(x) = \lambda L_3; \quad (L_1, L_3) = (L_2, L_3) = 0, \quad (L_3, L_3) = 1.$$

Indem wir so immer weiter schließen, kommen wir zu einem ganzen System orthogonaler normierter Eigenformen $L_\mu(x)$, und da dieses (§1, S. 220)

höchstens abzählbar unendlichviele Formen enthalten kann, so folgt notwendig, *daß wir nach endlichvielen oder abzählbar unendlichvielen Schritten zu einer Form*

$$(3.) \qquad K_0(x) = K(x) - \lambda \{L_1(x)^2 + L_2(x)^2 + \cdots\}$$

gelangen, die keine zu λ gehörige Eigenform mehr hat, während die beschränkten Linearformen $L_1(x)$, $L_2(x)$ ... den Relationen

$$(4^a.) \qquad (L_\nu, L_\mu) = \begin{cases} 1 \text{ für } \nu = \mu, \\ 0 \text{ für } \nu \neq \mu, \end{cases}$$

$$(4^b.) \qquad K L_\nu(x) = \lambda L_\nu(x), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

$$(4^c.) \qquad K_0 L_\nu(x) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

genügen.

Es sei nun $M(x)$ irgendeine zum Eigenwert λ gehörige Eigenform von $K(x)$:

$$(5.) \qquad K M(x) = \lambda M(x).$$

Wir entwickeln M nach den Orthogonalformen $L_1, L_2, \ldots$ analog wie man eine willkürliche Funktion nach Orthogonalfunktionen in *Fourier*scher Manier entwickelt, d. h. wir bilden die Reihe:

$$(M, L_1)\ L_1(x) + (M, L_2)\ L_2(x) + \cdots.$$

Sie stellt notwendig eine beschränkte lineare Form dar; denn nach den Ungleichungen (2.) und (11.) des § 1 ist ihr Quadrat kleiner als

$$\sum_{(\nu)} (M, L_\nu)^2 \cdot \sum_{(\nu)} L_\nu(x)^2 \leqq (M, M) \cdot \sum_{(p)} x_p^2.$$

Also ist auch die Differenz

$$(5'.) \qquad N(x) = M(x) - \{(M, L_1) L_1(x) + (M, L_2) L_2(x) + \cdots\}$$

eine beschränkte Linearform; wir zeigen, daß sie notwendig identisch verschwindet. Denn wegen (4c.) folgt durch Faltung mit $K_0(x)$:

$$K_0 N(x) = K_0 M(x).$$

Tragen wir rechts für K_0 den Wert (3.) ein und berücksichtigen, daß $L_\nu(x)^2$ mit einer Form $M(x)$ gefaltet $L_\nu(x)\,(L_\nu, M)$ ergibt (vgl. § 1, (5a.)), so folgt:

$$K_0 N(x) = K M(x) - \lambda \{L_1(x)\,(M, L_1) + L_2(x)\,(M, L_2) + \cdots\},$$

oder wegen (5.) und (5′.):

$$K_0 N(x) = \lambda N(x);$$

$N(x)$ wäre also eine zum Eigenwert λ gehörige Eigenfunktion von K_0 und muß daher — unserer Annahme über $K_0(x)$ nach — identisch verschwinden. Demnach folgt aus (5′.)

$$M(x) = (M, L_1)\,L_1(x) + (M, L_2)\,L_2(x) + \cdots,$$

d. h. *jede zum Eigenwerte λ gehörige Eigenform von $K(x)$ ist ein lineares Aggregat der Orthogonalformen $L_1(x)$, $L_2(x), \ldots$* mit Koeffizienten von konvergenter Quadratsumme — und umgekehrt ist natürlich *jedes solche Aggregat notwendig eine Eigenform.*

Wir nennen die $L_1(x), L_2(x), \ldots$, um diese Eigenschaft auszudrücken, ein *„vollständiges System zueinander orthogonaler Eigenformen"*. Es kann natürlich verschiedene solche Systeme geben, jedoch folgt unmittelbar aus ihrer Definition, daß je zwei von ihnen durch eine eineindeutige orthogonale Transformation aus einander hervorgehen:

$$L'_\mu(x) = \sum_{(\nu)} o_{\mu\nu} L_\nu(x), \quad L_\nu(x) = \sum_{(\mu)} o_{\mu\nu} L'_\mu(x).$$

Speziell enthalten diese Systeme also alle die gleiche endliche Anzahl, oder

alle abzählbar unendlichviele Formen — wodurch die *Vielfachheit* des Eigenwertes λ definiert ist.

Alle diese Entwicklungen übertragen sich unmittelbar auch auf den bisher ausgeschlossenen eventuellen *Eigenwert Null*, indem man die Definitionsgleichung $KL(x) = 0$ der zugehörigen Eigenformen in

$$(K+E)L(x) = L(x)$$

umschreibt; also stimmen die sämtlichen zum Eigenwert 0 gehörigen Eigenformen der Form K mit den sämtlichen zum Eigenwert 1 gehörigen der Form $K+E$ überein.

Das Resultat dieser Betrachtung ist:

Zu jedem Eigenwert einer reellen beschränkten quadratischen Form gibt es ein bis auf eineindeutige orthogonale Transformationen in sich bestimmtes vollständiges System zueinander orthogonaler Eigenformen, dessen lineare Kombinationen (mit beliebigen Koeffizienten von konvergenter Quadratsumme) die sämtlichen Eigenformen für diesen Eigenwert umfassen. Die Anzahl seiner Formen, die endlich oder auch abzählbar unendlich sein kann, heißt die Vielfachheit des Eigenwertes λ.

Ich fasse jetzt weiterhin *verschiedene Eigenwerte* ins Auge, um ihre Gesamtheit — das sog. *Punktspektrum der quadratischen Form* — übersehen zu können. Es seien λ_1, λ_2 zwei verschiedene Eigenwerte, zu denen die Eigenformen $L^{(1)}(x), L^{(2)}(x)$ gehören:

$$(6^{a}.) \qquad KL^{(1)}(x) = \lambda_1 L^{(1)}(x) \quad \text{oder} \quad \sum_{(q)} k_{pq} l_q^{(1)} = \lambda_1 l_p^{(1)}, \qquad (p=1,2,\ldots)$$

$$(6^{b}.) \qquad KL^{(2)}(x) = \lambda_2 L^{(2)}(x) \quad \text{oder} \quad \sum_{(q)} k_{pq} l_q^{(2)} = \lambda_2 l_p^{(2)}. \qquad (p=1,2,\ldots)$$

Multiplizieren wir $(6^{a}.)$ mit $l_p^{(2)}$, $(6^{b}.)$ mit $l_p^{(1)}$ und summieren jedesmal über p, so werden die linken Seiten wegen der Symmetrie von K $(k_{pq} = k_{qp})$ einander gleich und es folgt:

$$\lambda_1 \sum_{(p)} l_p^{(1)} l_p^{(2)} = \lambda_2 \sum_{(p)} l_p^{(1)} l_p^{(2)},$$

und wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\sum_{(p)} l_p^{(1)} l_p^{(2)} = (L^{(1)}, L^{(2)}) = 0.$$

Eigenformen, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, sind also zueinander orthogonal. Da es nun nur abzählbar unendlichviele Orthogonalformen geben kann (§ 1, S. 220), so folgt unmittelbar das wichtige Theorem, *daß jede beschränkte quadratische Form höchstens abzählbar unendlichviele Eigenwerte besitzt.* Nehmen wir für jeden dieser Eigenwerte das vollständige System seiner orthogonalisierten Eigenformen nach dem vorigen Satze, so erhalten wir das *vollständige System aller überhaupt zu $K(x)$ gehörigen Eigenformen* als ein System zueinander orthogonaler Linearformen.

Wir bezeichnen nun alle diese verschiedenen Eigenformen, in eine einfache Reihe geordnet, mit $L_1(x), L_2(x), \ldots$, und die zugehörigen Eigenwerte entsprechend mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, wobei unter diesen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ein und derselbe Wert endlich oder gar abzählbar unendlich oft auftreten kann. Da alle λ_ν unterhalb einer endlichen Grenze liegen müssen (S. 224) und da $\sum_{(\nu)} L_\nu(x)^2$ stets konvergiert und unterhalb $\sum_{(p)} x_p^2$ bleibt, konvergiert auch $\sum_{(\nu)} \lambda_\nu L_\nu(x)^2$ absolut und man erkennt leicht, daß es eine beschränkte quadratische Form (im Sinne von § 1, (4.)), darstellt. Wiederholen wir also den oben (S. 225 f. f.) für einen Eigenwert angewendeten Prozeß nun unverändert für alle Eigenwerte, und setzen

$$(7.) \qquad K(x) = \lambda_1 L_1(x)^2 + \lambda_2 L_2(x)^2 + \cdots + K_0(x),$$

wo

$$(7^a.) \qquad (L_\nu, L_\mu) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}, \quad K L_\nu(x) = \lambda_\nu L_\nu(x), \quad K_0 L_\nu(x) = 0,$$

so *wird $K_0(x)$ eine beschränkte quadratische Form, die außer $\lambda = 0$ keinen einzigen Eigenwert mehr hat.* Dann und nur dann, wenn $K_0(x)$ identisch verschwindet, bilden, wie man leicht sieht, diese $L_1, L_2, \ldots$ ein „*vollständiges*“ Orthogonalsystem im früher (S. 220) definierten Sinne.

Indem man $K_0 = 0$ annimmt, kann man gemäß der Darstellung (7.) sofort *Beispiele quadratischer Formen bilden, die eine ganz beliebige, nur innerhalb endlicher Grenzen gelegene abzählbare Menge reeller λ-Werte λ_1, $\lambda_2, \ldots$ zu Eigenwerten haben;* man braucht unter Verwendung irgendeines vollständigen Orthogonalsystems, beispielsweise des einfachsten möglichen $L_\nu(x) = x_\nu$, nur zu setzen:

$$K(x) = \lambda_1 L_1(x)^2 + \lambda_2 L_2(x)^2 + \cdots = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots .$$

Beispielsweise können die λ_ν die Menge aller rationalen Punkte eines endlichen Intervalles sein, wobei jeder Punkt noch beliebig vielfach verwendet werden kann.

Kapitel II.

Untersuchung des Streckenspektrums.

§ 3.

Formen ohne Punktspektrum.

Wir haben uns nunmehr mit der Untersuchung der Restform $K_0(x)$ zu beschäftigen, und ich führe zunächst als einfaches Beispiel*) für eine solche *beschränkte nicht identisch verschwindende Form ohne einen einzigen Eigenwert* die Form an:

$$K(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \cdots .$$

Man kann nämlich die zugehörigen Gleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} x_2 - \lambda x_1 = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{1}{2}(x_{p-1} + x_{p+1}) - \lambda x_p = 0 \qquad (p = 2, 3, \ldots) \end{aligned}$$

sofort sukzessive auflösen und erkennt leicht, daß im Falle $|\lambda| \geqq 1$ die

*) Siehe *Hilbert* IV, S. 208.

sich so ergebenden $x_1, x_2, \ldots$ immer größer werden und daher keine konvergente Quadratsumme haben können. Ist aber $|\lambda| < 1$, so setze man etwa:

$$\lambda = \cos t \quad \text{und} \quad x_1 = c \sin t,$$

und findet dann nach bekannten trigonometrischen Formeln

$$x_2 = 2 \cos t \cdot c \cdot \sin t = c \sin 2t,$$

$$x_3 = 2 \cos t \cdot c \cdot \sin 2t - c \sin t = c \sin 3t,$$

und schließlich allgemein:

$$x_p = c \sin pt; \qquad (p=1, 2, \ldots)$$

aus dieser Darstellung ergibt sich leicht, daß $\sum\limits_{(p)} x_p^2$ stets divergiert.

Man bemerkt nun jedoch, daß diese x_p eine *andere Konvergenzbedingung* erfüllen, die einen verwandten und doch wesentlich verschiedenen Charakter hat; es ist nämlich eine bekannte Eigenschaft der trigonometrischen Funktionen wie überhaupt jedes Orthogonalsystems, *daß die Quadratsumme ihrer Integrale*

$$\sum_{(p)} \Big(\int_0^t \sin pt \, dt \Big)^2$$

konvergiert. Dies gibt den Anlaß, auch allgemein nunmehr solche Lösungen $\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \ldots$ der homogenen Gleichungen

$$(1.) \qquad \sum_{(q)} k_{pq} \varphi_q(\lambda) = \lambda \varphi_p(\lambda) \qquad (p=1, 2, \ldots)$$

als Funktionen des kontinuierlich veränderlichen Parameters λ zu suchen, für die lediglich die Quadratsumme der Integrale nach λ

$$(2.) \qquad \sum_{(p)} \Big(\int_0^\lambda \varphi_p(\lambda) \, d\lambda \Big)^2$$

konvergiert; man wird in ihnen einen Ersatz für die event. fehlenden Eigenformen, bzw. in der Gesamtheit der Werte λ, für die solche Lösungen existieren, einen Ersatz für die Eigenwerte vermuten dürfen. Dazu wäre zunächst nötig, daß jene Bedingung orthogonalen Transformationen gegenüber invariant ist, d. h. daß mit den $\varphi_p(\lambda)$ auch die durch eine orthogonale Transformation aus ihnen hervorgehenden Funktionen

$$\psi_p(\lambda) = \sum_{(q)} o_{pq}\, \varphi_q(\lambda). \tag{3.}$$

die gleiche Eigenschaft haben. Hier tritt sofort eine *charakteristische Schwierigkeit* auf. Da $\sum_{(q)} \varphi_q(\lambda)^2$ im allgemeinen *nicht* konvergiert, und die Größen $o_{p1}, o_{p2}, \ldots$ einer Zeile des orthogonalen Schemas schließlich willkürliche Größen von nur konvergenter Quadratsumme sind, so wird die Reihe für ψ_p im allgemeinen gar nicht konvergieren und auch an den Stellen, wo sie etwa konvergiert, keine im gewöhnlichen Sinne integrierbare Funktion darstellen. Wohl aber folgt, falls die Reihen (3.) etwa gleichmäßig konvergieren, unmittelbar, daß die Größen $\int_0^\lambda \psi_p(\lambda)\, d\lambda$ aus den $\int_0^\lambda \varphi_p(\lambda)\, d\lambda$ — d. s. Größen von konvergenter Quadratsumme — durch die gleiche orthogonale Transformation (3.) entstehen, und daß daher ihre Quadratsumme tatsächlich konvergiert. Man könnte freilich versuchen, auch im allgemeinen Falle mit dem *Lebesgue*schen Integralbegriff auszukommen, jedoch würden auch da noch wesentliche Schwierigkeiten offen bleiben, und vor allem würden kompliziertere Untersuchungen über Entwicklung nach trigonometrischen und allgemeineren Orthogonalfunktionen nötig werden, wie sie dem Wesen des hier behandelten Problems durchaus nicht gemäß sind.

Man kann aber allen diesen Unzuträglichkeiten aus dem Wege gehen, wenn man in konsequenter Weise ausschließlich die *Integrale* der bisher genannten Lösungen $\varphi_p(\lambda)$ betrachtet, wobei sich dann einige einfache und für die vorliegenden Zwecke sehr bequem zu handhabende Verallgemeinerungen des Integralbegriffes als zweckmäßig ergeben werden. Wir werden nämlich statt der Gleichungen (1.) die durch gliedweise Integration aus ihnen entstehenden Gleichungen

$$(4.) \qquad \sum_{(q)} k_{pq} \int_0^\lambda \varphi_q(\lambda)\, d\lambda = \int_0^\lambda \lambda \varphi_p(\lambda)\, d\lambda \qquad (p=1,2,\ldots)$$

betrachten; durch eine leichte Umformung der rechten Seiten wird es gelingen, sie allein als Bedingungen für die Integralfunktionen

$$(5.) \qquad \varrho_p(\lambda) = \int_0^\lambda \varphi_p(\lambda)\, d\lambda$$

zu schreiben, und wir haben dann in ihnen Gleichungen für diese Funktionen, die unter der Bedingung der Konvergenz von $\sum_{(p)} \varrho_p(\lambda)^2$ zu lösen sind. Die hierin liegende Verschiebung der Fragestellung ist *berechtigt*, da es ja in erster Linie nicht auf die Lösungen der Gleichungen (1.) ankommt, sondern auf die Wertintervalle λ, in denen solche nicht identisch verschwindende Lösungen $\varphi_p(\lambda)$ bzw. nicht durchweg konstante $\varrho_p(\lambda)$ möglich sind; sie ist aber auch *nützlich*, da wir es nun statt mit den möglicherweise äußerst unstetigen Funktionen $\varphi_p(\lambda)$ mit *stetigen Funktionen* $\varrho_p(\lambda)$, die sogar von beschränkter Schwankung sind, zu tun haben werden. Überdies ließe sich zeigen, daß man stets nachträglich unter Verwendung der *Lebesgue*schen Begriffe leicht zu den Differentialquotienten $\varphi_p(\lambda)$ der gefundenen $\varrho_p(\lambda)$ übergehen kann, und zwar erfüllen diese dann — wie sich leicht ergibt — die Gleichungen (1.) im Sinne der „Äquivalenz" oder „mittleren Konvergenz"*) d. h. das Integral des Quadrates des Restes der links stehenden Reihen konvergiert gegen Null.

Ich will nun zunächst, bevor wir diesen Gedankengang durchführen, einige dabei notwendige eigenartige *Integrationsprozesse* nebst ihren einfachen Eigenschaften kurz ohne Beweis zusammenstellen, so wie ich sie bereits in meiner Dissertation**) benutzt habe.

§ 4.

Hilfssätze über gewisse Integrale.

Eine Funktion $\varrho(\lambda)$ einer reellen Variablen λ nenne ich, wie üblich, *monoton wachsend* oder kurzweg *monoton*, wenn für $\lambda_1 > \lambda_2$ stets $\varrho(\lambda_1) \geqq \varrho(\lambda_2)$

*) *E. Fischer*, „Sur la convergence en moyenne". C. R. de l'Acad. des Sciences. Paris. T. 144 (1907), S. 1022.

**) Siehe besonders § 5 (S. 25—31).

ist (streckenweises Konstantbleiben ist also nicht ausgeschlossen). Die Differenz zweier monotoner Funktionen $\varrho_1(\lambda) - \varrho_2(\lambda) = f(\lambda)$ heißt nach Herrn *C. Jordan**) eine Funktion *von beschränkter Schwankung (à variation bornée);* sie hat die charakteristische Eigenschaft, daß die für jede beliebige Einteilung eines Intervalles $a \leqq \lambda \leqq b$ durch endlichviele Punkte $\lambda_0 = a$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}, \lambda_n = b$ gebildete Summe der Beträge der Zuwächse von Punkt zu Punkt:

$$\sum_{i=1}^{n} |\Delta_i f(\lambda)| = \sum_{i=1}^{n} |f(\lambda_i) - f(\lambda_{i-1})|$$

unter einer festen von der Wahl der Einteilung unabhängigen Grenze bleibt. Ist $f(x)$ obendrein noch *stetig*, so hat diese Summe für jede Folge solcher Teilungen, deren größtes Intervall gegen Null konvergiert — d. h. genau bei dem das gewöhnliche Integral definierenden Grenzprozeß — einen wohlbestimmten von der speziell verwendeten Teilungsfolge unabhängigen Grenzwert, den man passend durch

$$\text{(1.)} \qquad \int_a^b |df(\lambda)| = \mathop{L}_{\Delta_i = 0} \sum_{i=1}^{n} |\Delta_i f(\lambda)|$$

bezeichnet und *Gesamtschwankung von* $f(x)$ *im Intervall* (a, b) nennt; er ist eine stetige Funktion der oberen Grenze b**).

Ist nun $u(\lambda)$ irgend eine weitere stetige endliche Funktion und wählt man bei dem beschriebenen Grenzprozeß in jedem Intervalle $\lambda_{i-1} \leqq \lambda \leqq \lambda_i$ irgendeinen Wert u_i dieser Funktion, so folgt aus der Existenz von (1.) unmittelbar auch die Existenz des folgenden im gleichen Sinne zu verstehenden integralartigen Grenzwertes***):

$$\text{(2.)} \qquad \mathop{L}_{\Delta_i = 0} \sum_{i=1}^{n} u_i \Delta_i f(\lambda) = \int_a^b u(\lambda)\, df(\lambda);$$

---

*) Cours d'analyse. 2. éd. (Paris 1893), S. 54 ff.

**) Beweis bei *Lebesgue*, Leçons sur l'intégration, (Paris 1904), S. 52 ff.

***) Solche Integrale wurden bei verwandten Untersuchungen schon früher benutzt, besonders von *Stieltjes*, „Recherches sur les fractions continues". (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse T. VIII (1894) = Mém. prés. par div. sav. à l'Acad. des Sciences. Paris. T. XXXII. No. 2.)

er stellt eine stetige Funktion beschränkter Schwankung der oberen Grenze dar. Ist $u(\lambda)$ selbst gleichfalls von beschränkter Schwankung, so folgt leicht die Formel der „Produktintegration“:

$$(3.) \qquad \int_a^b u(\lambda)\, df(\lambda) = [u(\lambda)\, f(\lambda)]_a^b - \int_a^b f(\lambda)\, du(\lambda).$$

Ist von $f(\lambda)$ nur Stetigkeit bekannt, so kann diese Formel zur Definition des linken Integrales dienen.

Ist speziell in einem ganzen Intervalle $u(\lambda) \geqq m > 0$, so leitet man aus (2.) oder (3.) ohne wesentliche Schwierigkeit die Umkehrungsformel her:

$$(4.) \qquad f(\lambda) - f(a) = \int_a^\lambda \frac{dF(\lambda)}{u(\lambda)} = \frac{F(\lambda)}{u(\lambda)} + \int_a^\lambda \frac{F(\lambda)\, du(\lambda)}{u(\lambda)^2},$$

$$\text{wo } F(\lambda) = \int_a^\lambda u(\lambda)\, df(\lambda).$$

Übrigens kann man jedes Integral (2.) als Differenz zweier gewöhnlicher Integrale entsprechend der Zerlegung von $f(\lambda)$ in die Differenz zweier monotoner Funktionen $\varrho(\lambda)$ darstellen. Denn die Inverse $\lambda = \lambda(\varrho)$ besitzt höchstens abzählbar unendlichviele (den Konstanzintervallen von $\varrho(\lambda)$ entsprechende) Unstetigkeitsstellen; daher existiert $\int_{\varrho(a)}^{\varrho(b)} u(\lambda(\varrho))\, d\varrho$ im gewöhnlichen Sinne und ist offenbar gleich $\int_a^b u(\lambda)\, d\varrho(\lambda)$.

Wesentlich über den Rahmen dieser Begriffe hinaus geht jedoch ein weiterer zuerst in meiner Dissertation aufgestellter *integralartiger Grenzprozeß*, den wir im folgenden brauchen werden. Es seien $g(\lambda), h(\lambda), h_1(\lambda)$ monotone, endliche und stetige Funktionen, und $f(\lambda), f_1(\lambda)$ zwei weitere Funktionen, für deren Zuwächse in einem jeden betrachteten Teilintervalle Δ die Ungleichungen

$$(5.) \qquad (\Delta f)^2 \leqq \Delta g\, \Delta h, \quad (\Delta f_1)^2 \leqq \Delta g\, \Delta h_1$$

gelten. Dann*) ist $f(\lambda)$ notwendig stetig und von beschränkter Schwankung, und es existieren für jede Folge von Teilungen des Intervalles (a, b) in eine wachsende Anzahl gleichmäßig immer kleiner werdender Intervalle $\Delta_1, \ldots \Delta_n$ — d. h. wiederum genau bei dem das gewöhnliche Integral definierenden Grenzprozesse — die wohlbestimmten, von der speziell verwendeten Teilungsfolge unabhängigen Grenzwerte („Integrale"):

$$(5^{a}.) \qquad \underset{\Delta_i=0}{L} \sum_{i=1}^{n} \frac{(\Delta_i f(\lambda))^2}{\Delta_i g(\lambda)} = \int_a^b \frac{(df(\lambda))^2}{dg(\lambda)},$$

$$(5^{b}.) \qquad \underset{\Delta_i=0}{L} \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_i f(\lambda)\, \Delta_i f_1(\lambda)}{\Delta_i g(\lambda)} = \int_a^b \frac{df(\lambda)\, df_1(\lambda)}{dg(\lambda)}.$$

Dabei sind event. Konstanzintervalle $\Delta_i g = 0$, in denen wegen (5.) auch $\Delta_i f = 0$ ist, nicht zu berücksichtigen. Diese Integrale sind nun als Funktionen der oberen Grenze stetig und sogar von beschränkter Schwankung, und es gelten die Ungleichungen:

$$(6^{a}.) \qquad \frac{(f(a)-f(b))^2}{g(a)-g(b)} \leqq \int_a^b \frac{df(\lambda)^2}{dg(\lambda)} \leqq h(b)-h(a),$$

$$(6^{b}.) \qquad \left\{\int_a^b \frac{df(\lambda)\, df_1(\lambda)}{dg(\lambda)}\right\}^2 \leqq \int_a^b \frac{df(\lambda)^2}{dg(\lambda)} \int_a^b \frac{df_1(\lambda)^2}{dg(\lambda)} \leqq (h(b)-h(a))\,(h_1(b)-h_1(a)).$$

Setzt man an Stelle von (5.) nur voraus, daß die Summen $(5^{a}.)$ sämtlich unter einer endlichen Grenze bleiben, so kann man das Integral $(5^{a}.)$ als ihren Limes superior definieren; man kann jedoch — falls nur $f(\lambda)$ und $g(\lambda)$ stetig sind — leicht zeigen, daß auch dann das Integral genau im oben angeführten Sinne als eigentlicher Grenzwert und mit genau den gleichen Eigenschaften existiert**).

---

*) Siehe Dissert. S. 27—29.

**) Zum Beweise bemerke man, daß der Limes superior jedenfalls eine monotone Funktion $h(b)$ der oberen Grenze darstellt, für die $(\Delta f)^2 \leqq \Delta g\, \Delta h$ gilt; bildet man nun durch Subtraktion der (höchstens abzählbar unendlichvielen) Sprünge aus $h(\lambda)$ eine stetige Funktion $h_s(\lambda)$, so folgt durch einfache Abschätzungen auf Grund der *Schwarz*schen Ungleichung, daß auch $(\Delta f)^2 \leqq \Delta g\, \Delta h_s$ ist, d. h. die Bedingung (5.) ist tatsächlich erfüllt.

Durch Kombination der Begriffe (2.) und (5.) erhält man weiterhin die Existenz der Grenzwerte*)

$$(7.)\qquad \underset{\Delta_i=0}{L} \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\Delta_i f(\lambda)\, \Delta_i f_1(\lambda)}{\Delta_i g(\lambda)} = \int_a^b u(\lambda) \frac{df(\lambda)\, df_1(\lambda)}{dg(\lambda)}$$

$$= \int_a^b u(\lambda)\, d \int_a^\lambda \frac{df(\lambda)\, df_1(\lambda)}{dg(\lambda)}.$$

Endlich sei noch die Bemerkung nachgetragen, daß, falls die Funktionen $f, g, \ldots$ stetig differenzierbar sind, die Integrale (2.), (3.), (5.), (7.) in unmittelbar ersichtlicher Weise in gewöhnliche Integrale der Differentialquotienten dieser Funktionen bzw. von Produkten oder Quotienten aus ihnen übergehen.

Wir werden diese Begriffe in der Folge besonders in ganz bestimmtem Zusammenhange anzuwenden haben. Es seien $\varrho_1(\lambda), \varrho_2(\lambda), \ldots$ stetige Funktionen, derart daß $\sum_{(p)} \varrho_p(\lambda)^2$ konvergiert und eine stetige, endliche Funktion von λ darstellt. Dann konvergiert die beschränkte Linearform

$$(8.)\qquad \mathsf{P}(\lambda; x) = \sum_{(p)} \varrho_p(\lambda)\, x_p$$

für jedes Wertsystem der x_p von konvergenter Quadratsumme gleichmäßig in λ (§ 1, S. 215) und stellt daher eine stetige Funktion dar, deren Integral durch gliedweise Integration gewonnen werden kann; für jede Funktion $u(\lambda)$ von beschränkter Schwankung folgt daher

$$\int_a^\lambda \mathsf{P}(\lambda; x)\, du(\lambda) = \sum_{(p)} x_p \int_a^\lambda \varrho_p(\lambda)\, du(\lambda),$$

oder durch Anwendung von (3.):

---

*) Siehe Dissert. S. 60.

$$(9.) \qquad \int_a^\lambda u(\lambda)\, d\mathsf{P}(\lambda;\ x) = \sum_{(p)} x_p \int_a^\lambda u(\lambda)\, d\varrho_p(\lambda),$$

und das eine wie das andere Integral stellt offenbar eine beschränkte Linearform dar.

Wir fügen nun die Annahme hinzu, daß — unter $\varrho_0(\lambda)$ eine bestimmte monotone Funktion verstanden — die Integrale $\int_a^b \frac{(d\mathsf{P}(\lambda;\ x))^2}{d\varrho_0(\lambda)}$ existieren und für alle der Ungleichung $\sum_{(p)} x_p^2 \leqq 1$ genügenden Wertsysteme unterhalb 1 bleiben. Ist dann $f(\lambda)$ irgendeine Funktion, für die $\int_a^b \frac{df^2}{d\varrho_0}$ existiert, so ist stets

$$(10.) \qquad \int_a^b \frac{df(\lambda)\, d\mathsf{P}(\lambda;x)}{d\varrho_0(\lambda)} = \sum_{(p)} x_p \int_a^b \frac{df(\lambda)\, d\varrho_p(\lambda)}{d\varrho_0(\lambda)}$$

eine beschränkte Linearform der x_p. Denn für eine Einteilung des Intervalles (a, b) in n Teile $\Delta_1, \ldots \Delta_n$ ist jedenfalls

$$(10^a.) \qquad \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i f(\lambda)\, \Delta_i \mathsf{P}(\lambda;x)}{\Delta_i \varrho_0(\lambda)} = \sum_{(p)} x_p \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i f(\lambda)\, \Delta_i \varrho_p(\lambda)}{\Delta_i \varrho_0(\lambda)}$$

eine beschränkte, nach (6.) unterhalb $\left(\int_a^b \frac{df^2}{d\varrho_0} \int_a^b \frac{d\mathsf{P}^2}{d\varrho_0}\right)^{\frac{1}{2}} \leqq \left(\int_a^b \frac{df^2}{d\varrho_0}\right)^{\frac{1}{2}}$ bleibende Form der x_p; also muß die Quadratsumme der Koeffizienten unterhalb $\int_a^b \frac{df^2}{d\varrho_0}$ bleiben. Da nun obendrein bei gleichmäßiger Verkleinerung der Teilintervalle für jedes p

$$\underset{\substack{\Delta_i=0 \\ n=\infty}}{L} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i f(\lambda)\, \Delta_i \varrho_p(\lambda)}{\Delta_i \varrho_0(\lambda)} = \int_a^b \frac{df(\lambda)\, d\varrho_p(\lambda)}{d\varrho_0(\lambda)}$$

existiert, so kann für jedes feste Wertsystem der x_p nach (3.) des § 1 der

Grenzwert der rechten Seite von (10ª.) gliedweise gebildet werden, womit tatsächlich (10.) folgt.

Mit Hilfe von (9.) und (7.) folgt aus (10.) unmittelbar

$$(11.) \qquad \int_a^b u(\lambda)\,\frac{df(\lambda)\,d\mathsf{P}(\lambda;x)}{d\varrho_0(\lambda)} = \sum_{(p)} x_p \int_a^b u(\lambda)\,\frac{df(\lambda)\,d\varrho_p(\lambda)}{d\varrho_0(\lambda)};$$

durch zweimalige Anwendung dieser Formel ergibt sich, daß

$$(12.) \qquad \int_a^b u(\lambda)\,\frac{(d\mathsf{P}(\lambda;x))^2}{d\varrho_0(\lambda)} = \sum_{(p,q)} x_p\,x_q \int_a^b u(\lambda)\,\frac{d\varrho_p(\lambda)\,d\varrho_q(\lambda)}{d\varrho_0(\lambda)}$$

eine beschränkte quadratische Form der x_p darstellt, für die die zugehörige Bilinearform bzw. die Faltung mit einer Linearform $L(x)$ gegeben ist durch

$$(12ª.) \qquad \int_a^b u(\lambda)\,\frac{d\mathsf{P}(\lambda;x)\,d\mathsf{P}(\lambda;y)}{d\varrho_0(\lambda)} \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b u(\lambda)\,\frac{d\mathsf{P}(\lambda;x)\,d(\mathsf{P}(\lambda),L)}{d\varrho_0(\lambda)}.$$

§ 5.

Eigenschaften der Differentiallösungen.

Mit diesen Hilfsmitteln knüpfen wir nun an die Fragestellung des § 3 an. Wir fragen nach solchen *abzählbar unendlichvielen stetigen Funktionen* $\varrho_1(\lambda), \varrho_2(\lambda), \ldots$ des reellen Parameters λ, für deren Zuwächse $\Delta\varrho_p = \varrho_p(\lambda_2) - \varrho_p(\lambda_1)$ in jedem Intervalle $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$ die unendlichvielen Gleichungen

$$(1.) \qquad \sum_{(q)} k_{pq}\,\Delta\varrho_q(\lambda) - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda\,d\varrho_p(\lambda) = 0 \qquad (p=1,2,\ldots)$$

bestehen, und *deren Quadratsumme obendrein gegen eine stetige endliche*

Funktion von λ konvergiert:

$$(2.) \qquad \sum_{(p)} (\varrho_p(\lambda))^2 = \varrho_0(\lambda).$$

Das entspricht tatsächlich genau den Gleichungen (4.), (5.) des § 3, denn wenn $\frac{d\varrho_p}{d\lambda} = \varphi_p(\lambda)$ speziell als stetige Funktion existiert, geht (1.) nach der Bemerkung von S. 238 genau in (4.) über. Natürlich ist dadurch jedes $\varrho_p(\lambda)$ höchstens bis auf eine willkürliche additive Konstante bestimmt, die wir etwa so normieren können, daß *für* $\lambda = 0$ *alle* $\varrho_p(\lambda)$ *verschwinden.*

Nun ergibt sich leicht, daß die Intervalle Δ der λ-Achse, in denen die Lösungen $\Delta\varrho_p$ von (1.) nicht sämtlich verschwinden, einen *orthogonal invarianten Charakter* haben. Denn multiplizieren wir die Gleichungen (1.) mit Variablen x_p von konvergenter Quadratsumme, summieren über p und führen wieder die beschränkten Linearformen

$$(3.) \qquad \mathsf{P}(\lambda; x) = \sum_{(p)} \varrho_p(\lambda) x_p, \quad \Delta\mathsf{P}(\lambda; x) = \sum_{(p)} \Delta\varrho_p(\lambda) x_p$$

ein, so folgt unter Berücksichtigung von (9.) des § 4 und unter Benutzung der Faltungssymbole des § 1 (S. 216):

$$(4.) \qquad K\Delta\mathsf{P}(\lambda; x) - \int_{(\Delta)} \lambda d\mathsf{P}(\lambda; x) = 0.$$

Aus der Kovarianz des Faltungsprozesses bei orthogonaler Transformation (§ 1, (13.)) folgt nun unmittelbar, daß für eine orthogonal transformierte Form $K'(x')$ die Koeffizienten ϱ'_p der durch die gleiche Transformation aus $\mathsf{P}(\lambda; x)$ hervorgehenden Form $\mathsf{P}'(\lambda; x')$ Lösungen der entsprechenden Gleichungen sind; da wegen der Orthogonalität der Transformation jedenfalls $\sum_{(p)} \Delta\varrho_p^2 = \sum_{(p)} \Delta\varrho_p'^2$ ist, so unterliegen sie der gleichen Konvergenzbedingung (2.) und verschwinden dann und nur dann für ein Intervall Δ sämtlich, wenn alle $\Delta\varrho_p = 0$ sind.

Es erweist sich nun bequem, statt von dem System der Zuwächse $\Delta\varrho_p(\lambda)$ bzw. der Linearformen $\Delta\mathsf{P}(\lambda;x)$ für alle möglichen Intervalle Δ der λ-Achse symbolisch von den „*Differentialen*“ $d\varrho_p(\lambda)$ bzw. den „*linearen Differentialformen*“ $d\mathsf{P}(\lambda;x)=\sum_{(p)} d\varrho_p(\lambda)\,x_p$ zu sprechen*), die wir *beschränkt* nennen, insofern die Konvergenzbedingung (2.) erfüllt ist. Demgemäß schreiben wir an Stelle von (1.) und (4.)

$$(1'.)\qquad \sum_{(q)} k_{pq}\,d\varrho_q(\lambda)-\lambda\,d\varrho_p(\lambda)=0, \qquad (p=1,2,\ldots)$$

$$(4'.)\qquad K\,d\mathsf{P}(\lambda;x)-\lambda\,d\mathsf{P}(\lambda;x)=0,$$

und sagen kurz, *die Differentiale $d\varrho_p(\lambda)$ genügen den gewöhnlichen homogenen zu $K-\lambda E$ gehörigen Gleichungen, bzw. die Differentialform $d\mathsf{P}(\lambda;x)$ ist eine zum Werte λ gehörige „Eigendifferentialform“ von $K(x)$*; natürlich soll das lediglich ein kurzer Ausdruck für den durch (1.) bzw. (4.) dargestellten Sachverhalt sein; denn im allgemeinen braucht ja der Differentialquotient $\frac{d\varrho_p}{d\lambda}$ oder gar $\frac{d\mathsf{P}}{d\lambda}$ nicht zu existieren, und einen eigentlichen Sinn haben eben nur die integrierten Gleichungen (1.) (vgl. § 3). Wir sagen, daß $d\mathsf{P}(\lambda;x)$ an einer Stelle λ identisch verschwindet, wenn für jedes sie einschließende Intervall $\Delta\mathsf{P}(\lambda;x)$ identisch verschwindet. Dann ergeben unsere bisherigen Betrachtungen offenbar, *daß die Gesamtheit der Stellen, für die $K(x)$ nicht identisch verschwindende beschränkte Eigendifferentialformen besitzt, allen orthogonalen Transformationen gegenüber invariant ist*; diese Punktmenge, die, wie sich zeigen wird, die Mächtigkeit des Kontinuums besitzt, heißt nach Herrn *Hilbert*, der ihre Existenz zuerst nachgewiesen hat**), *Streckenspektrum oder kontinuierliches Spektrum der Form K.*

Wir leiten nun die *fundamentale Eigenschaft der Eigendifferentialformen* her, die der *Orthogonalität* der zu verschiedenen Eigenwerten gehörigen Eigenformen entspricht***). Wir betrachten die zwei getrennt

*) Vgl. meine Dissertat. S. 21, 74.

**) *Hilbert* IV, S. 172.

***) Einen analogen Beweis gibt Herr *Weyl* (Math. Ann. 66, S. 296) gelegentlich der Übertragung des bereits in meiner Dissertation aufgestellten Begriffs der Differentiallösungen auf Integralgleichungen.

liegenden Intervalle $(0, \lambda_1)$ und (μ_1, μ_2) des Streckenspektrums:

$$0 < \lambda_1 < \mu_1 < \mu_2,$$

für die die Gleichungsysteme gelten:

$$\sum_{(q)} k_{pq} \varrho_q(\lambda_1) = \int_0^{\lambda_1} \lambda \, d\varrho_p(\lambda), \qquad (p=1, 2, \ldots)$$

$$\sum_{(q)} k_{pq} \{\varrho_q(\mu_2) - \varrho_q(\mu_1)\} = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \mu \, d\varrho_p(\mu). \qquad (p=1, 2, \ldots)$$

Indem wir sie mit $\{\varrho_p(\mu_2) - \varrho_p(\mu_1)\}$ bzw. $\varrho_p(\lambda_1)$ multiplizieren und über p summieren, erhalten wir wegen der Symmetrie von K (die Vertauschung der Summationsfolge links ist erlaubt, da die ϱ_p Wertsysteme von konvergenter Quadratsumme sind):

$$\sum_{(p)} \{\varrho_p(\mu_2) - \varrho_p(\mu_1)\} \int_0^{\lambda_1} \lambda \, d\varrho_p(\lambda) = \sum_{(p)} \varrho_p(\lambda_1) \int_{\mu_1}^{\mu_2} \mu \, d\varrho_p(\mu).$$

Führen wir nun die Faltung der beiden Formen $\mathsf{P}(\lambda; x)$, $\mathsf{P}(\mu; x)$ ein:

$$(5.) \qquad \sum_{(p)} \varrho_p(\lambda) \varrho_p(\mu) = \mathsf{E}(\lambda, \mu),$$

so geht die letzte Gleichung nach (9.) des § 4 über in

$$(6.) \qquad \int_0^{\lambda_1} \lambda \, d_\lambda \{\mathsf{E}(\lambda, \mu_2) - \mathsf{E}(\lambda, \mu_1)\} = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \mu \, d_\mu \mathsf{E}(\lambda_1, \mu),$$

wo der Index am Differentiationszeichen die Variable anzeigt, nach der integriert werden soll. Nach (3.) des § 4 und unter Benutzung des gewöhnlichen Mittelwertsatzes der Integralrechnung können wir die rechte Seite umformen in

$$\mu_2 \mathsf{E}(\lambda_1, \mu_2) - \mu_1 \mathsf{E}(\lambda_1, \mu_1) - \int_{\mu_1}^{\mu_2} \mathsf{E}(\lambda_1, \mu)\, d\mu$$

$$= \mu_2 \{\mathsf{E}(\lambda_1, \mu_2) - \mathsf{E}(\lambda_1, \mu_1)\} + (\mu_2 - \mu_1)\{\mathsf{E}(\lambda_1, \mu_1) - \mathsf{E}(\lambda_1, \bar{\mu})\},$$

wo $\bar{\mu}$ einen Wert zwischen μ_1 und μ_2 bezeichnet. Damit geht (6.) über in

$$\int_0^{\lambda_1} (\mu_2 - \lambda)\, d_\lambda \left\{ \frac{\mathsf{E}(\lambda, \mu_2) - \mathsf{E}(\lambda, \mu_1)}{\mu_2 - \mu_1} \right\} = \mathsf{E}(\lambda_1, \bar{\mu}) - \mathsf{E}(\lambda_1, \mu_1),$$

und hieraus folgt, da im ganzen Integrationsintervalle $0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1$ der Faktor $\mu_2 - \lambda \geqq \mu_2 - \lambda_1 > 0$ bleibt, nach (4.) des § 4:

$$(7.) \qquad \frac{\mathsf{E}(\lambda_1, \mu_2) - \mathsf{E}(\lambda_1, \mu_1)}{\mu_2 - \mu_1} = \int_0^{\lambda_1} \frac{d_\lambda \{\mathsf{E}(\lambda, \bar{\mu}) - \mathsf{E}(\lambda, \mu_1)\}}{\mu_2 - \lambda}$$

$$= \frac{\mathsf{E}(\lambda_1, \bar{\mu}) - \mathsf{E}(\lambda_1, \mu_1)}{\mu_2 - \lambda_1} - \int_0^{\lambda_1} \frac{\{\mathsf{E}(\lambda, \bar{\mu}) - \mathsf{E}(\lambda, \mu_1)\}\, d\lambda}{(\mu_2 - \lambda)^2}.$$

Nun führt eine einfache Abschätzung zum Ziele. Es ist nämlich nach der *Schwarz*schen Ungleichung:

$$\{\mathsf{E}(\lambda, \bar{\mu}) - \mathsf{E}(\lambda, \mu_1)\}^2 \leqq \sum_{(p)} \varrho_p(\lambda)^2 \sum_{(p)} \{\varrho_p(\bar{\mu}) - \varrho_p(\mu_1)\}^2;$$

aus der Tatsache, daß jedes einzelne $\varrho_p(\mu)$ und $\sum_{(p)} \varrho_p(\mu)^2$ stetige Funktionen von μ sind, folgert man ganz leicht, daß der zweite Faktor rechts beliebig klein wird, wenn $\bar{\mu}$ gegen μ_1 konvergiert, und daher wird dann auch $\mathsf{E}(\lambda, \bar{\mu}) - \mathsf{E}(\lambda, \mu_1)$ unabhängig von λ beliebig klein. Also folgt aus (7.), da $\bar{\mu}$ gleichzeitig mit μ_2 gegen μ_1 konvergiert und $\frac{1}{\mu_2 - \lambda}$ stets unterhalb einer endlichen Grenze bleibt:

$$\mathop{L}_{\mu_2 = \mu_1} \frac{\mathsf{E}(\lambda_1, \mu_2) - \mathsf{E}(\lambda_1, \mu_1)}{\mu_2 - \mu_1} = 0;$$

mit andern Worten, die Funktion $\mathsf{E}(\lambda_1, \mu)$ von μ besitzt an jeder Stelle $\mu_1 > \lambda_1$ die Ableitung 0 nach μ, d. h. sie hat für alle diese Stellen bei festem λ_1 denselben von μ_1 unabhängigen Wert; da sie aber gewiß auch noch an der Stelle $\mu = \lambda_1$ eine stetige Funktion von μ darstellt, ist dieser Wert gleich $\mathsf{E}(\lambda_1, \lambda_1)$. Wir haben also schließlich, da auch λ_1 eine willkürliche Stelle war, unter Berücksichtigung von (2.):

$$(8.) \qquad \mathsf{E}(\lambda, \mu) = \sum_{(p)} \varrho_p(\lambda)\, \varrho_p(\mu) = \sum_{(p)} \varrho_p(\lambda)^2 = \varrho_0(\lambda) \quad \text{für} \quad \mu \geqq \lambda.$$

Um die hiermit gewonnene charakteristische Eigenschaft übersichtlicher auszudrücken, schließen wir aus ihr zunächst für die Zuwächse $\Delta_1 \varrho_p(\lambda)$ in irgendeinem Intervalle $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \mu_1$:

$$(8^{\text{a}}.) \quad \sum_{(p)} (\Delta_1 \varrho_p)^2 = \sum_{(p)} |\varrho_p(\mu_1) - \varrho_p(\lambda_1)|^2 = \varrho_0(\mu_1) - 2\varrho_0(\lambda_1) + \varrho_0(\lambda_1) = \Delta_1 \varrho_0.$$

Ist ferner $\Delta_2(\lambda_2 \leqq \lambda \leqq \mu_2)$ ein zweites ganz oberhalb Δ_1 liegendes Intervall $(\mu_1 < \lambda_2)$, so folgt ähnlich:

$$(8^{\text{b}}.) \qquad \sum_{(p)} \Delta_1 \varrho_p \, \Delta_2 \varrho_p = \sum_{(p)} \{\varrho_p(\mu_1) - \varrho_p(\lambda_1)\}\, \{\varrho_p(\mu_2) - \varrho_p(\lambda_2)\}$$

$$= \varrho_0(\mu_1) - \varrho_0(\mu_1) - \varrho_0(\lambda_1) + \varrho_0(\lambda_1) = 0.$$

Bezeichnen wir endlich mit Δ_1, Δ_2 zwei ganz beliebige Intervalle und mit $\Delta_{(1,2)}$ ihren gemeinsamen Teil, so erhalten wir aus (8ª.) und (8ᵇ.) unmittelbar durch entsprechende Zerlegung der Differenzen $\Delta_1 \varrho_p$, $\Delta_2 \varrho_p$:

$$(9.) \qquad \sum_{(p)} \Delta_1 \varrho_p \, \Delta_2 \varrho_p = (\Delta_1 \mathsf{P},\ \Delta_2 \mathsf{P}) = \Delta_{(1,2)} \varrho_0,$$

wobei $\Delta_{(1,2)} \varrho_0 = 0$ ist, wenn Δ_1, Δ_2 keinen Teil gemein haben. Hierin sind offenbar (8.), (8ª.), (8ᵇ.) als Spezialfälle enthalten, und der bequemste Ausdruck der charakteristischen Eigenschaft ist damit gefunden.

Wir können (9.) als Eigenschaft der durch (4.) definierten Linearformen $\Delta \mathsf{P}(\lambda; x)$ so aussprechen: *Die zu zwei getrennt liegenden Intervallen* Δ_1, Δ_2 *gehörigen* (4.) *genügenden Formen sind orthogonal, indessen sind sie so normiert, daß die Quadratsumme ihrer Koeffizienten nicht gleich* 1, *sondern gleich der zugehörigen Differenz der Funktion* $\varrho_0(\lambda)$ *ist:*

$$(9^{a}.) \qquad (\Delta_i \mathsf{P}, \Delta_1 \mathsf{P}) = \Delta_1 \varrho_0.$$

Mit der oben eingeführten symbolischen Sprechweise werden wir das kürzer als Eigenschaften der „Differentialformen" $d\mathsf{P}(\lambda; x)$ ausdrücken:

$$(10.) \qquad (d\mathsf{P}(\lambda), d\mathsf{P}(\mu)) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \lambda \neq \mu, \\ d\varrho_0(\lambda), & \text{wenn } \lambda = \mu, \end{cases}$$

und werden demgemäß das System der Differentialformen $d\mathsf{P}(\lambda; x)$ ein *System orthogonaler Differentialformen* sowie die für ihre Normierung maßgebende Funktion $\varrho_0(\lambda)$ seine *Basisfunktion* nennen. Unser Resultat ist dann, daß *die zu den verschiedenen Stellen des Streckenspektrums gehörigen Eigendifferentialformen einer beschränkten quadratischen Form zueinander orthogonal sind.*

Wir können im Anschluß hieran leicht zeigen, *daß das Streckenspektrum notwendig ganz im Endlichen und zwar zwischen Maximum und Minimum von* $K(x)$ *gelegen ist* — genau wie es für das Punktspektrum galt. Denn multiplizieren wir etwa die Gleichungen (1.) mit $\Delta \varrho_p(\lambda)$ und summieren über p, so folgt unter Berücksichtigung von (9.) des § 4 aus der Orthogonalitätseigenschaft (da $\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$):

$$\sum_{(p,q)} k_{pq} \Delta \varrho_p \Delta \varrho_q = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda \, d_\lambda \sum_{(p)} \varrho_p(\lambda) \Delta \varrho_p(\lambda) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda \, d\varrho_0(\lambda).$$

Nun steht links der Wert der quadratischen Form $K(x)$ für die Variablen $x_p = \Delta \varrho_p(\lambda)$, deren Quadratsumme $\Delta \varrho_0$ ist; die rechte Seite ist wegen der Monotonie von $\varrho_0(\lambda)$ gleich einem Mittelwerte $\bar{\lambda}$ im Intervalle (λ_1, λ_2)

multipliziert mit $\Delta\varrho_0 = \Sigma(\Delta\varrho_p)^2$. Also nimmt die Form $K(x)$ unter der Nebenbedingung $\Sigma x_p^2 = 1$ den Wert $\bar{\lambda}$ an und kommt daher, da wir Δ beliebig klein nehmen können, jedem Werte im Streckenspektrum beliebig nahe; damit ist wegen der Beschränktheit von K die Behauptung bewiesen. — Ähnlich könnte man nun übrigens noch direkt zeigen, daß ein Streckenspektrum aus komplexen Werten nicht auftreten kann.

Wir müssen nun zunächst einige Hilfsbetrachtungen einschalten:

§ 6.

Systeme orthogonaler linearer Differentialformen.

Ich bemerke zunächst, daß die sämtlichen Koeffizienten $\varrho_p(\lambda)$ bzw. $d\varrho_p(\lambda)$ unseres Systems ebenso ein zweidimensionales (von 2 Variablen p, λ abhängiges) Schema darstellen, wie die Koeffizienten l_{pq} der früher betrachteten Systeme abzählbar unendlichvieler normierter Orthogonalformen $L_p(x)$. Nur durchläuft jetzt der eine Index λ einen *kontinuierlichen* Wertevorrat — einen Teil der reellen Achse —, während vorher beide Indizes gleichmäßig die *abzählbare* Reihe der ganzen Zahlen durchliefen. Im Grunde ist diese Abweichung aber nur eine scheinbare, da für jedes p die kontinuierlich vielen Werte $\varrho_p(\lambda)$ eine *stetige* Funktion von λ bilden sollen und daher bereits durch abzählbar viele Angaben bestimmt sind. Infolgedessen werden wir tatsächlich Resultate erhalten, die den für jene abzählbaren Systeme geltenden Sätzen ganz analog sind.

Aus der unser System definierenden Relation

$$(1.) \qquad (\Delta_1 \mathsf{P}, \Delta_2 \mathsf{P}) = \sum_{(p)} \Delta_1\varrho_p \, \Delta_2\varrho_p = \Delta_{(1,2)}\varrho_0$$

schließen wir zunächst, wenn $\Delta_1 = \Delta_2$ ist, daß stets $\Delta\varrho_0 \geqq 0$, d. h. *daß die Basisfunktion notwendig monoton ist*; ferner folgt, daß in sämtlichen Konstanzintervallen von $\varrho_0(\lambda)$ sämtliche $\varrho_p(\lambda)$ konstant d. h. sämtliche $\Delta\mathsf{P}(\lambda; x)$ identisch Null sind. Die Gesamtheit der Stellen, an denen die Differentialformen $d\mathsf{P}(\lambda; x)$ (im Sinne von S. 242) nicht identisch verschwinden, d. h. das ihnen zugehörige *Streckenspektrum*, ist also identisch mit der *perfekten Punktmenge*, die von der reellen λ-Achse nach Abzug der inneren Punkte der

höchstens abzählbar unendlichvielen Konstanzintervalle von $\varrho_0(\lambda)$ übrig bleibt; sie hat als solche notwendig die *Mächtigkeit des Kontinuums.*

Wir bilden jetzt aus unseren orthogonalen Differentialformen das, was der *Quadratsumme* beschränkter Orthogonalformen analog ist. Sind $\Delta_1, \dots \Delta_n$ irgend n getrennte Teile eines Intervalles (a, b) der λ-Achse, so sind die n Formen

$$\frac{\Delta_i \mathsf{P}(\lambda; x)}{\sqrt{\Delta_i \varrho_0(\lambda)}} = \sum_{(p)} \frac{\Delta_i \varrho_p(\lambda)}{\sqrt{\Delta_i \varrho_0(\lambda)}} x_p \qquad (i=1, 2, \dots n)$$

wegen (1.) n orthogonale normierte beschränkte Linearformen. Also ist nach einem bekannten Satze (§ 1, (11.)) ihre Quadratsumme:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\{\Delta_i \mathsf{P}(\lambda; x)\}^2}{\Delta_i \varrho_0(\lambda)} \leqq \sum_{(p)} x_p^2.$$

Da das für alle Teilungen des Intervalles (a, b) gilt, und die obere Grenze $\sum_{(p)} x_p^2$ von der Wahl der Teilung unabhängig ist, folgt aus § 4 (S. 237) in dem dort definierten Sinne die Existenz des Integrales:

$$(2.) \qquad \int_a^b \frac{(d\,\mathsf{P}(\lambda; x))^2}{d\varrho_0(\lambda)} = \sum_{(p,q)} x_p x_q \int_a^b \frac{d\varrho_p(\lambda)\, d\varrho_q(\lambda)}{d\varrho_0(\lambda)} \leqq \sum_{(p)} x_p^2,$$

das zudem nach (12.) des § 4 eine beschränkte quadratische Form der x_p darstellt.

Nachdem so die Existenz dieser Integrale garantiert ist, verstehen wir unter f eine beliebige Funktion, für die nur $\int_a^b \frac{df^2}{d\varrho_0}$ existiert; dann folgt aus (10.) des § 4, wenn wir darin für x_p die Werte $\varrho_p(\lambda_1)$ an irgendeiner Stelle λ_1 des Intervalles (a, b) setzen:

$$(3.) \qquad \sum_{(p)} \varrho_p(\lambda_1) \int_a^b \frac{df(\lambda)\, d\varrho_p(\lambda)}{d\varrho_0(\lambda)} = \int_a^b \frac{df(\lambda)\, d\{\sum_{(p)} \varrho_p(\lambda)\varrho_p(\lambda_1)\}}{d\varrho_0(\lambda)} = f(\lambda_1),$$

da nach (1.) $\sum_{(p)} \varrho_p(\lambda)\varrho_p(\lambda_1)$ gleich $\varrho_0(\lambda)$ bzw. $\varrho_0(\lambda_1)$ ist, je nachdem $\lambda < \lambda_1$ oder $\lambda > \lambda_1$ ist. Wir können diese offenbar absolut und gleichmäßig konvergente Reihe als Entwicklung von $f(\lambda_1)$ nach den Funktionen $\varrho_p(\lambda)$ bezeichnen. — Bedeutet $f_1(\lambda)$ eine zweite gleichartige Funktion wie $f(\lambda)$, so wenden wir wiederholt die Formel (10.) des § 4 an, indem wir $x_p = \int_a^b \frac{df_1 d\varrho_p}{d\varrho_0}$ und daher nach (3.) $\mathsf{P}(\lambda; x) = f_1(\lambda)$ setzen; wir finden dann:

$$(4.) \qquad \sum_{(p)} \int_a^b \frac{df(\lambda)\, d\varrho_p(\lambda)}{d\varrho_0(\lambda)} \int_a^b \frac{df_1(\lambda)\, d\varrho_p(\lambda)}{d\varrho_0(\lambda)} = \int_a^b \frac{df(\lambda)\, df_1(\lambda)}{d\varrho_0(\lambda)}.$$

Diese Formel ist der Orthogonalitätseigenschaft (1.) völlig äquivalent, und zwar ergibt sich (1.) sofort aus ihr, wenn wir $f(\lambda)$ in Δ_1, $f_1(\lambda)$ in Δ_2 gleich $\varrho_0(\lambda)$, und $f(\lambda)$ außerhalb Δ_1 sowie $f_1(\lambda)$ außerhalb Δ_2 konstant setzen.

Man kann nun *zu jeder beliebig, nur als monotone stetige Funktion gegebenen Basis* $\varrho_0(\lambda)$ *ein solches System orthogonaler Differentialformen leicht bilden.* Es sei der Bequemlichkeit halber $\varrho_0(a) = 0$, $\varrho_0(b) = 1$ angenommen, was keine wesentliche Einschränkung ist, und es mögen die stetigen Funktionen $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots$ ein sog. „vollständiges Funktionensystem" für das Intervall $0 \leqq t \leqq 1$ bilden, d. h. es bestehe für je zwei willkürliche nur abteilungsweise stetige Funktionen $u(t), v(t)$ die Relation:

$$(5.) \qquad \sum_{(p)} \int_0^1 u(t)\varphi_p(t)\, dt \int_0^1 v(t)\varphi_p(t)\, dt = \int_0^1 u(t)v(t)\, dt.$$

Solche Systeme kann man leicht bilden*); ein einfachstes Beispiel sind bekanntlich die trigonometrischen Funktionen $\varphi_p(t) = \sqrt{2} \sin \pi p t$. Dann stellen die Funktionen

$$(5^a.) \qquad \varrho_p(\lambda) = \int_0^{\varrho_0(\lambda)} \varphi_p(t)\, dt$$

*) Vgl. etwa *Hilbert* V, S. 442ff.

die Koeffizienten eines Systemes orthogonaler Differentialformen dar; denn setzen wir $u(t) = u(\varrho_0(\lambda))$ gleich 1, wenn λ in Δ_1 variiert, sonst aber gleich 0, und ebenso $v(t) = v(\varrho_0(\lambda))$ gleich 1, wenn λ in Δ_2 variiert und sonst gleich 0, so geht (5.) unmittelbar in die definierende Relation (1.) über.

Man wird ein System linearer Differentialformen *vollständig* nennen, wenn die Ungleichung (2.) für alle x als Gleichung erfüllt ist:

$$(6.) \qquad \int_a^b \frac{(d\,\mathsf{P}(\lambda; x))^2}{d\varrho_0(\lambda)} = \sum_{(p)} x_p^2 \quad \text{oder} \quad \int_a^b \frac{d\varrho_p(\lambda)\, d\varrho_q(\lambda)}{d\varrho_0(\lambda)} = \delta_{pq} = \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ 1 & (p = q). \end{cases}$$

Das soeben konstruierte besondere System wird auch vollständig, wenn man den φ_p noch die Relationen:

$$(7.) \qquad \int_0^1 \varphi_p(t)\, \varphi_q(t)\, dt = \delta_{pq} = \begin{cases} 0 & (p \neq q) \\ 1 & (p = q) \end{cases}$$

auferlegt; denn aus (5ª.) ergibt sich unmittelbar nach dem Mittelwertsatz, daß die verallgemeinerten Integrale (6.) diesen gewöhnlichen Integralen gleich sind.

Man nennt gewöhnlich die Gleichungen (5.) die Vollständigkeits-, (7.) die Orthogonalitätsrelationen, also gerade umgekehrt als die Benennung, zu der wir hier naturgemäß geführt werden. Man denkt sich nämlich dabei gerade alle Werte $\varphi_p(\lambda)$ für einen festen Index p zu einem Individuum, einer Funktion, zusammengezogen, während wir hier gerade alle Werte $\varrho_p(\lambda)$ bzw. $d\varrho_p(\lambda)$ für eine feste Stelle λ zu einem Individuum, einer Differentialform, zusammenfaßten. Beides ist gleich berechtigt, ebenso wie man aus einem gewöhnlichen abzählbaren orthogonalen Schema (l_{pq}) sowohl die Formen $L_p = \sum_{(q)} l_{pq} x_q$, als auch die $L'_p = \sum_{(q)} l_{qp} x_q$ bilden kann; nur ist das Resultat im vorliegenden Falle äußerlich von etwas verschiedener Form, da nur noch der eine Index p des Schemas abzählbar viele, der andere jedoch kontinuierlich viele Werte durchläuft. Jedenfalls sind aber auch hier Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelation ihrem Wesen nach gleichartige, nur in der Auffassung unterschiedene Relationen; die Erfüllung

der einen von ihnen zieht stets eine gewisse Ungleichung als notwendige Folge nach sich, die — wenn sie in eine Gleichung übergeht — die andere liefert.

Wir wollen nun endlich noch gleichzeitig *mehrere in demselben Intervalle der λ-Achse definierte Systeme orthogonaler Differentialformen* $\mathsf{P}^{(\alpha)}(\lambda; x) = \sum_{(p)} \varrho_p^{(\alpha)}(\lambda) x_p$ mit den Basisfunktionen $\varrho_0^{(\alpha)}(\lambda)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ in Betracht ziehen, die außerdem noch sämtlich *untereinander orthogonal* sein sollen, d. h.

$$(8.) \qquad (\Delta_1 \mathsf{P}^{(\alpha)}, \Delta_2 \mathsf{P}^{(\beta)}) = \sum_{(p)} \Delta_1 \varrho_p^{(\alpha)} \Delta_2 \varrho_p^{(\beta)} = \begin{cases} 0 & \text{für } \alpha \neq \beta \\ \Delta_{(1,2)} \varrho_0^{(\alpha)} & \text{für } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Da demgemäß die für getrennte Intervalle Δ_i oder verschiedene Indizes α gebildeten Linearformen $\frac{\Delta_i \mathsf{P}^{(\alpha)}}{\sqrt{\Delta_i \varrho_0^{(\alpha)}}}$ ein System beschränkter normierter Orthogonalformen bilden, so können wir durch Wiederholung des Schlusses von S. 248 folgern, daß jede Summe von endlichvielen oder abzählbar unendlichvielen Integralen, deren jedes nach (2.) aus einem der Systeme $\mathsf{P}^{(\alpha)}(\lambda; x)$ gebildet ist, konvergiert und eine der folgenden Ungleichung genügende quadratische Form darstellt:

$$(9.) \qquad \sum_{\alpha = 1, 2, \ldots} \int_a^b \frac{(d\mathsf{P}^{(\alpha)}(\lambda; x))^2}{d\varrho_0^{(\alpha)}(\lambda)} \leqq \sum_{(p)} x_p^2.$$

Weiterhin aber können wir hieraus oder auch direkt aus dem für beschränkte Orthogonalformen geltenden entsprechenden Satze (§ 1, S. 220) schließen, *daß es in jedem Intervalle $\Delta = (a, b)$ der λ-Achse höchstens abzählbar unendlichviele solche nicht identisch verschwindende aufeinander orthogonale Systeme orthogonaler Differentialformen geben kann.* Denn da $\Delta \varrho_0^{(\alpha)} = \varrho_0^{(\alpha)}(b) - \varrho_0^{(\alpha)}(a)$ jedenfalls von Null verschieden ist, hätten wir in $\frac{\Delta \mathsf{P}^{(\alpha)}(\lambda; x)}{\sqrt{\Delta \varrho_0^{(\alpha)}}}$ sonst mehr als abzählbar unendlichviele nicht identisch verschwindende normierte beschränkte Orthogonalformen.

§ 7.

Die Integraldarstellung der quadratischen Form für das Streckenspektrum.

Wir fahren nunmehr in den Betrachtungen von § 5 fort, und zwar gestatten uns die inzwischen gewonnenen Hilfsmittel, das in § 2 (S. 225ff.) bei den Punkteigenwerten eingeschlagene Verfahren ganz genau zu übertragen, wenn wir uns jetzt zur *Frage nach den sämtlichen in einem Intervalle* (a,b) *möglichen Eigendifferentialformen von* $K(x)$ wenden. Es sei also $d\mathsf{P}^{(1)}(\lambda;x)$ irgend eine solche mit der Basisfunktion $\varrho_0^{(1)}(\lambda)$:

$$(a_1.)\quad K\Delta\mathsf{P}^{(1)}(\lambda;x)=\int_{(\Delta)}\lambda\, d\mathsf{P}^{(1)}(\lambda;x),\quad \text{wo } (\Delta_1\mathsf{P}^{(1)},\Delta_2\mathsf{P}^{(1)})=\Delta_{(1,2)}\varrho_0^{(1)},$$

so bilden wir die nach (2.) des § 6 und (12.) des § 4 beschränkte quadratische Form

$$(b_1.)\qquad K_1(x)=K(x)-\int_a^b\lambda\frac{(d\mathsf{P}^{(1)}(\lambda;x))^2}{d\varrho_0^{(1)}(\lambda)}.$$

Sie hat sicher $d\mathsf{P}^{(1)}(\lambda;x)$ nicht mehr zum Eigendifferential im Intervalle (a,b); denn zufolge (12ª.) des § 4 wird für jedes Intervall $\Delta=(\lambda_1,\lambda_2)$ innerhalb (a,b):

$$K_1\Delta\mathsf{P}^{(1)}(x)=K\Delta\mathsf{P}^{(1)}(x)-\int_a^b\lambda\frac{d\mathsf{P}^{(1)}(\lambda;x)\,d(\mathsf{P}^{(1)}(\lambda),\Delta\mathsf{P}^{(1)})}{d\varrho_0^{(1)}(\lambda)},$$

und da wegen der Orthogonalitätseigenschaft $(\mathsf{P}^{(1)}(\lambda),\Delta\mathsf{P}^{(1)})$ unabhängig von λ ist, wenn λ außerhalb Δ variiert, andernfalls aber gleich $\varrho_0^{(1)}(\lambda)-\varrho_0^{(1)}(\lambda_1)$ ist, so folgt

$$(c_1.)\quad K_1\Delta\mathsf{P}^{(1)}(x)=K\Delta\mathsf{P}^{(1)}(x)-\int_{(\Delta)}\lambda\, d\mathsf{P}^{(1)}(\lambda;x)=0\quad\text{wegen }(a_1).$$

Nun kann allerdings K_1 möglicherweise noch andere Eigendifferentialformen

$d\mathsf{P}^{(2)}(\lambda;x)$ im Intervalle (a,b) besitzen, die dann ein System orthogonaler Differentialformen, etwa mit der Basis $\varrho_0^{(2)}(\lambda)$, bilden:

$$(a_2.)\qquad K_1 \Delta \mathsf{P}^{(2)}(\lambda;x) = \int_{(\Delta)} \lambda\, d\mathsf{P}^{(2)}(\lambda;x), \quad \text{wo} \quad (\Delta_1\mathsf{P}^{(2)}, \Delta_2\mathsf{P}^{(2)}) = \Delta_{(1,2)}\varrho_0^{(2)}.$$

Falten wir diese Identität mit $\Delta_1\mathsf{P}^{(1)}(\lambda;x)$, wo Δ_1 irgendein zweites Teilintervall von (a,b) ist, so verschwindet in Rücksicht auf die Symmetrie der Form K_1 wegen $(c_1.)$ die linke Seite identisch, und es folgt, wenn wir noch die rechte Seite nach (9.) des § 4 umformen:

$$0 = \int_{(\Delta)} \lambda\, d(\mathsf{P}^{(2)}(\lambda), \Delta_1\mathsf{P}^{(1)}).$$

Da dies für jedes Teilintervall Δ von (a,b) gelten soll, muß der Integrand identisch verschwinden (vgl. § 4, (4.)), d. h. für je zwei Teilintervalle Δ, Δ_1 gilt:

$$(\Delta\mathsf{P}^{(2)}, \Delta_1\mathsf{P}^{(1)}) = 0.$$

Falten wir nunmehr $(b_1.)$ mit $\Delta\mathsf{P}^{(2)}$, und behandeln den Integralbestandteil genau wie oben, so ergibt er dieser Identität zufolge Null, und unter Berücksichtigung von $(a_2.)$ bleibt

$$\int_{(\Delta)} \lambda\, d\mathsf{P}^{(2)}(\lambda;x) = K\,\Delta\mathsf{P}^{(2)}(\lambda;x),$$

d. h. $d\mathsf{P}^{(2)}(\lambda;x)$ gehört als Eigendifferential für das Intervall (a,b) auch zu der ursprünglichen Form $K(x)$.

Nun bilden wir weiter nach demselben Verfahren die neue beschränkte Form

$$K_2(x) = K_1(x) - \int_a^b \lambda \frac{(d\,\mathsf{P}^{(2)}(\lambda;x))^2}{d\varrho_0^{(2)}(\lambda)} = K(x) - \int_a^b \lambda \frac{(d\,\mathsf{P}^{(1)}(\lambda;x))^2}{d\varrho_0^{(1)}(\lambda)} - \int_a^b \lambda \frac{(d\,\mathsf{P}^{(2)}(\lambda;x))^2}{d\varrho_0^{(2)}(\lambda)},$$

für die sofort ebenso

$$K_2 \Delta \mathsf{P}^{(1)}(\lambda; x) = K_2 \Delta \mathsf{P}^{(2)}(\lambda; x) = 0$$

folgt. Wohl aber kann K_2 möglicherweise ein weiteres System von Eigendifferentialformen $d\mathsf{P}^{(3)}(\lambda; x)$ haben, das dann notwendig auch ein zu $d\mathsf{P}^{(1)}$ und $d\mathsf{P}^{(2)}$ orthogonales Eigendifferentialsystem von K selbst für das Intervall (a, b) ist.

So fortschließend erhalten wir ein ganzes System zueinander orthogonaler Eigendifferentialformen $\mathsf{P}^{(a)}(\lambda; x)$, und da es deren nur abzählbar unendlichviele geben kann (vgl. S. 251), so muß unser Verfahren nach höchstens abzählbar unendlichvielen Schritten ein Ende erreichen: *wir müssen schließlich zu einer Form*

$$(1.) \qquad K_0(x) = K(x) - \sum_{a=1, 2, \dots} \int_a^b \lambda \frac{(d\,\mathsf{P}^{(a)}(\lambda; x))^2}{d\varrho_0^{(a)}(\lambda)}$$

gelangen, die für das Intervall (a, b) kein einziges Eigendifferential mehr hat, während die höchstens abzählbar unendlichvielen $\mathsf{P}^{(a)}$ den Relationen

$$(2^{\mathrm{a}}.) \qquad K \Delta \mathsf{P}^{(a)}(\lambda; x) = \int_{(\Delta)} \lambda\, d\mathsf{P}^{(a)}(\lambda; x),$$

$$(2^{\mathrm{b}}.) \qquad K_0 \Delta \mathsf{P}^{(a)}(\lambda; x) = 0,$$

$$(2^{\mathrm{c}}.) \qquad (\Delta_1 \mathsf{P}^{(a)}, \Delta_2 \mathsf{P}^{(\beta)}) = \begin{cases} 0 \text{ für } \alpha \neq \beta, \\ \Delta_{(1,2)} \varrho_0^{(a)}(\lambda) \text{ für } \alpha = \beta \end{cases}$$

genügen; die Beschränktheit der Form (1.) folgt auch bei unendlichvielen $\mathsf{P}^{(a)}$ aus der Ungleichung (9.) des § 6.

Es sei nun $\Pi(\lambda; x) = \sum_{(p)} \pi_p x_p$ irgendein zum Intervalle (a, b) gehöriges System von Eigendifferentialformen von $K(x)$:

$$(3.) \qquad K\,\Delta\Pi(\lambda;x) = \int_{(\Delta)} \lambda\, d\Pi(\lambda;x).$$

Wir bilden nun, ganz analog wie wir früher eine beschränkte Linearform nach einem System orthogonaler beschränkter Formen entwickelten (S. 227), das, was wir etwa eine „Entwicklung des Systems beschränkter Differentialformen $d\Pi(\lambda;x)$ nach den orthogonalen Differentialformen $d\mathsf{P}^{(\alpha)}(\lambda;x)$" nennen können. Wir erhalten sie, indem wir die Quadratsumme dieses Formensystemes $\sum_{(\alpha)} \int_a^b \frac{(d\mathsf{P}^{(\alpha)})^2}{d\varrho_0{}^{(\alpha)}}$ mit $\Delta\Pi$ falten, was nach (12ª.) des § 4 ergibt:

$$\sum_{(\alpha)} \int_a^b \frac{d\mathsf{P}^{(\alpha)}(\lambda;x)\, d\,(P^{(\alpha)}(\lambda), \Delta\Pi)}{d\varrho_0{}^{(\alpha)}(\lambda)}.$$

Nun müssen aber die für getrennt liegende Intervalle gebildeten Differenzen $\Delta_1\mathsf{P}^{(\alpha)}$, $\Delta_2\Pi$ orthogonal zueinander sein, da beides Differentialeigenformen von K sind; es war offenbar unwesentlich, daß wir beim Beweise dieses Satzes in § 5 (S. 242ff.) für die Lösungen in beiden Intervallen denselben Buchstaben P verwendeten. Daher ist die Faltung $(\mathsf{P}^{(\alpha)}(\lambda), \Delta\Pi)$ wiederum stets von λ unabhängig, wenn λ außerhalb Δ variiert, während sie innerhalb Δ eine gewisse stetige Funktion $\sigma^{(\alpha)}(\lambda)$ darstellt, die bis auf eine additive Konstante gleich $(\mathsf{P}^{(\alpha)}(\lambda), \Pi^{(\alpha)}(\lambda))$ ist. Nunmehr bilden wir mit jener so umgeformten Linearform die notwendig wiederum beschränkte Linearform

$$(3'.) \qquad \Delta\Pi_0(\lambda;x) = \Delta\Pi(\lambda;x) - \sum_{(\alpha)} \int_{(\Delta)} \frac{d\mathsf{P}^{(\alpha)}(\lambda;x)\, d\sigma^{(\alpha)}(\lambda)}{d\varrho_0{}^{(\alpha)}(\lambda)},$$

$$\text{wo } \sigma^{(\alpha)}(\lambda) = (\mathsf{P}^{(\alpha)}(\lambda), \Pi(\lambda));$$

wir zeigen, daß sie notwendig identisch verschwindet. Denn zunächst ergibt sich durch Faltung mit $K_0(x)$

$$K_0\,\Delta\Pi_0(\lambda;x) = K_0\,\Delta\Pi(\lambda;x),$$

da die eigentlich noch additiv hinzutretenden Integrale das wegen (2^b.) identisch verschwindende Differential von $K_0 \mathsf{P}^{(a)}(\lambda; x)$ als Faktor enthalten. Tragen wir nun rechts für K_0 den Wert (1.) ein und berücksichtigen wie soeben, daß $d(\mathsf{P}^{(a)}(\lambda), \Delta\Pi)$ nur in Δ von 0 verschieden und gleich $d\sigma^{(a)}(\lambda)$ ist, so folgt mit Benutzung von (3.):

$$K_0 \Delta\Pi_0(\lambda; x) = \int_{(\Delta)} \lambda\, d\Pi(\lambda; x) - \sum_{(a)} \int_{(\Delta)} \lambda \frac{d\mathsf{P}^{(a)}(\lambda; x)\, d\sigma^{(a)}(\lambda)}{d\varrho_0^{(a)}(\lambda)}.$$

Indem wir endlich die rechte Seite mit Hilfe von (7.) des § 4 umformen, geht sie unter Berücksichtigung der leicht ersichtlichen gleichmäßigen Konvergenz der Reihe (3′.) einfach über in

$$K_0 \Delta\Pi_0(\lambda; x) = \int_{(\Delta)} \lambda\, d\Pi_0(\lambda; x),$$

d. h. $\Delta\Pi_0$ wäre ein Eigendifferential der Form K_0 für das Intervall (a, b) und muß daher — unserer Annahme über K_0 nach — identisch verschwinden. Also folgt aus (3′.)

$$(4.) \qquad \Delta\Pi(\lambda; x) = \sum_{(a)} \int_{(\Delta)} \frac{d\mathsf{P}^{(a)}(\lambda; x)\, d\sigma^{(a)}(\lambda)}{d\varrho_0^{(a)}(\lambda)}, \quad \text{wo } \sigma^{(a)}(\lambda) = (\mathsf{P}^{(a)}(\lambda), \Pi(\lambda)),$$

was wir, indem wir symbolisch den Übergang zu den „Differentialen“

$$d\Pi(\lambda; x) = \sum_{(a)} \frac{d\mathsf{P}^{(a)}(\lambda; x)\, d\sigma^{(a)}(\lambda)}{d\varrho_0^{(a)}(\lambda)}$$

vollzogen denken, so aussprechen können:

Jede Differentialeigenform einer quadratischen Form $K(x)$ läßt sich in dieser Weise als lineares Aggregat von höchstens abzählbar unendlichvielen orthogonalen Differentialformen $d\mathsf{P}^{(a)}(\lambda; x)$ darstellen, und jedes solche mit willkürlichen Funktionen $\sigma^{(a)}(\lambda)$, für die nur $\sum_{(a)} \int_a^b \frac{(d\sigma^{(a)})^2}{d\varrho_0^{(a)}}$ konvergiert, gebildete

Aggregat stellt offenbar eine Differentiallösung dar; die $\mathsf{P}^{(a)}(\lambda; x)$ *mögen ein vollständiges System zueinander orthogonaler Eigenformen für das betr. Intervall heißen.*

Nun können wir (a, b) auf das ganze vom Maximum und Minimum von $K(x)$ (unter der Nebenbedingung $\sum_{(p)} x_p^2 = 1$) begrenzte Intervall ausdehnen, auf das nach S. 246 das Streckenspektrum von $K(x)$ notwendig beschränkt ist; dann hat die durch (1.) definierte Form $K_0(x)$ *überhaupt kein Streckenspektrum* mehr, denn eine zu einem außerhalb (a, b) gelegenen Intervalle gehörige Eigendifferentialform müßte auch Eigendifferential von $K(x)$ selbst sein. Unser Theorem liefert also das *vollständige System aller überhaupt zu* $K(x)$ *gehörigen Eigendifferentialformen*, und es besagt überdies, daß jedem Teilintervalle des Streckenspektrums — genau wie jedem Punkteigenwert — eine *gewisse höchstens abzählbar unendliche Vielfachheit* zukommt; das gesamte Streckenspektrum entsteht also (vgl. § 6, S. 247) einfach durch Überlagerung der perfekten Mengen der Stellen, in deren Umgebung jede der Basisfunktionen $\varrho_0^{(a)}(\lambda)$ nicht konstant ist. Übrigens gestattet uns (1.), wenn wir etwa $K_0 = 0$ setzen, sofort die Konstruktion *quadratischer Formen mit beliebig gegebenem Streckenspektrum*, bzw. mit beliebig gegebenen abzählbar unendlichvielen Basisfunktionen, da wir ja nach (5.) des § 6 (S. 249) zu jeder von ihnen ein System orthogonaler Differentialformen sofort angeben können.

Im allgemeinen kann nun aber $K_0(x)$ *noch ein Punktspektrum* haben, und, wie man leicht sieht, ist dies, von der Stelle Null abgesehen, *identisch mit dem Punktspektrum von* $K(x)$. Denn ist $K_0 M(x) = \lambda_1 M(x)$, so folgt wegen ($2^b$.) unmittelbar $(M, \Delta \mathsf{P}^{(a)}) = 0$, wenn nur $\lambda_1 \neq 0$ ist, und daher ergibt die Faltung von (1.) mit M in der oben ausführlich erörterten Weise $KM(x) = K_0 M(x) = \lambda_1 M(x)$. Umgekehrt aber folgt aus dieser letzten Gleichung wegen (2^a.)

$$\int_{(\Delta)} \lambda \, d(\mathsf{P}^{(a)}, M) - \lambda_1 (\Delta \mathsf{P}^{(a)}, M) = \int_{(\Delta)} (\lambda - \lambda_1) \, d(\mathsf{P}^{(a)}, M) = 0,$$

und da dies für jedes Intervall Δ gilt, ist wiederum $(\Delta P^{(a)}, M) = 0$ und daher gemäß (1.) $K_0 M(x) = KM(x) = \lambda_1 M(x)$. Hierin ist zugleich enthalten

(für $K_0 = 0$), daß eine durch ein Streckenintegral allein dargestellte Form keinen von Null verschiedenen Punkteigenwert haben kann. Wir können nun also $K_0(x)$ nach (7.) des § 2 durch das vollständige System $L_\beta(x)$ ($\beta = 1, 2, \ldots$) der Eigenformen von $K(x)$ darstellen und erhalten, wenn wir das in (1.) eintragen, schließlich

$$(5.) \qquad K(x) = \sum_{(\alpha)} \int_a^b \lambda \frac{(d\mathsf{P}^{(\alpha)}(\lambda; x))^2}{d\varrho_0^{(\alpha)}(\lambda)} + \sum_{(\beta)} \lambda_\beta (L_\beta(x))^2 + R(x),$$

wo $R(x)$ eine beschränkte quadratische Form ist, die außer dem Eigenwerte $\lambda = 0$ *weder Punkt- noch Streckenspektrum* mehr besitzt. Ich werde im nächsten Kapitel zeigen, *daß eine solche Form* $R(x)$ *notwendig identisch verschwindet*; wir haben alsdann *in* (5.) *die kanonische Darstellung der quadratischen Form durch ihr Streckenspektrum und ihre Differentialeigenformen einerseits, sowie ihr Punktspektrum und ihre Eigenformen andererseits* — dieselbe Darstellung, die ich in meiner Dissertation (vgl. besonders § 9, Satz III, S. 60) aus den Resultaten von Herrn *Hilbert*s 4. Mitteilung hergeleitet habe.

Mit der Herleitung dieser Formel ist die Theorie der quadratischen Formen zu einem gewissen Abschluß gebracht; einerseits stellt sie den Ausgangspunkt für alle Anwendungen, andererseits die Grundlage für weitere theoretische Entwicklungen dar. In dieser letzteren Hinsicht sei hier als leichte Folge von (5.) noch erwähnt, daß zwei quadratische Formen sicher dann orthogonal ineinander transformierbar sind, wenn ihre Eigenwerte einschließlich ihrer Vielfachheit und ihre Basisfunktionen paarweise übereinstimmen (vgl. meine Diss., Satz IV, S. 61). Wesentlich schwieriger ist jedoch die Herleitung *notwendiger und hinreichender* Bedingungen für orthogonale Äquivalenz; dazu ist — wobei aber immer die Formel (5.) den Ausgangspunkt bildet — noch eine tiefergehende Untersuchung der Integrale des § 4 nötig, und es stellen sich dann neben den bisher als Streckenspektra schlechtweg bezeichneten perfekten Mengen gewisse nicht abgeschlossene Mengen („eigentliche" Spektra) als maßgebend heraus, die sich in bestimmter Weise aus der Art des Wachstums der Funktionen $\varrho^{(\alpha)}(\lambda)$ ergeben, und die jene perfekten Mengen zu Ableitungen haben (a. a. O. Satz VII, S. 74; VIII, S. 80).

Kapitel III.

Die Existenz des Spektrums.

§ 8.

Die reziproke Form von $K-\nu E$ als analytische Funktion von ν.

Wir haben nun zur Vervollständigung unseres Beweisganges noch zu zeigen, daß eine quadratische Form, die außer $\lambda = 0$ kein Punkt- oder Streckenspektrum hat, identisch verschwindet. Nun können wir aber jede Form leicht durch eine andere mit gleichem Wertevorrat ersetzen, die $\lambda = 0$ sicher nicht zum Eigenwert hat: Bedeutet nämlich $L_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ ein vollständiges orthogonales System der zum Eigenwert $\lambda = 0$ gehörigen Eigenformen von $K(x)$ (§ 2, S. 228 f.), so ergänzen wir diese Formen durch $M_\beta(x)$ $(\beta = 1, 2, \ldots)$ zu einem vollständigen Orthogonalsystem (§ 1, S. 220), und nehmen die eineindeutige orthogonale Transformation $x'_\alpha = L_\alpha(x)$, $x''_\beta = M_\beta(x)$ der Variablen $x_1, x_2, \ldots$ in $x'_1, x'_2, \ldots, x''_1, x''_2, \ldots$ vor. Dann verschwindet wegen $K L_\alpha(x) = 0$ auch die Faltung der transformierten Form $K(x) = K^*(x'\, x'')$ mit den Linearformen x'_α, d. h. dies K^* enthält in Wahrheit nur noch die Variablen x''_β; da ferner alle zu $\lambda = 0$ gehörigen Eigenformen lineare Kombinationen der $L_\alpha(x) = x'_\alpha$ sind, hat K^*, allein als Form der x'_β betrachtet, $\lambda = 0$ überhaupt nicht mehr zum Eigenwert. Es genügt demgemäß, das folgende *Fundamentaltheorem* zu beweisen:

Jede nicht identisch verschwindende beschränkte quadratische Form besitzt entweder eine nicht identisch verschwindende Eigenform oder eine solche Differentialeigenform.

Zum Beweise gehe ich von der Untersuchung der reziproken Form $\mathsf{K}(\nu; x)$ der *mit komplexen Parameterwerten* $\nu = \lambda + i\mu$ gebildeten Formenschar $K - \nu E$ aus, die (vgl. § 2, S. 222) definiert ist durch

$$(1.) \qquad (K - \nu E)\, \mathsf{K}(\nu; x) = K\, \mathsf{K}(\nu; x) - \nu\, \mathsf{K}(\nu; x) = E(x).$$

Für den Existenzbeweis dieses $\mathsf{K}(\nu; x)$ kommt vor allem ein allgemeiner Satz in Betracht, den Herr *O. Toeplitz**) aufgestellt und durch

---

*) „Die *Jacobi*sche Transformation der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen." Nachr. d. K. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Kl. 1907, S. 101.

ein wesentlich algebraisches Verfahren (die sog. *Jacobi*sche Transformation der quadratischen Form) bewiesen hat: daß eine reelle beschränkte Bilinearform A eine eindeutig bestimmte Reziproke dann und nur dann besitzt, wenn die beiden definiten quadratischen Formen AA' und $A'A$ für keine der Bedingung $\sum_{(p)} x_p^2 = 1$ genügende Wertsysteme beliebig kleine Werte annehmen. Neuerdings hat Herr *E. Hilb**) diesen Satz einfacher durch Benutzung einer Potenzreihenentwicklung bewiesen, während er andererseits auch aus den allgemeineren Untersuchungen von Herrn *E. Schmidt***) über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten folgt.

Für unsern Zweck eignet sich die *Hilb*sche Beweisführung am besten, da sie sich leicht so ausgestalten läßt, daß sie auch einige für den Existenzbeweis des Spektrums notwendige Abschätzungen liefert; um das alles bald mit zu erhalten, stelle ich sie mit unwesentlichen Modifikationen zunächst dar. Dabei hat, weil es sich um komplexe Formen handelt, an Stelle von $A'A$ die *Hermite*sche Form $\overline{A'}A$ zu treten (vgl. § 1, (9.))***). Wir bilden also, da K und E reell und symmetrisch sind, mit zwei konjugiert komplexen Stellen $\nu = \lambda + i\mu$, $\overline{\nu} = \lambda - i\mu$ die Form

$$(2.)\quad S = (K - \nu E)(K - \overline{\nu} E) = K^2 - 2\lambda K + (\lambda^2 + \mu^2) E = (K - \lambda E)^2 + \mu^2 E,$$

die also wiederum eine reelle symmetrische Form ist. Da $(K - \lambda E)^2$ positiv definit ist (§ 1, (8a.)), so folgt

$$(3.)\qquad S(x) \geqq \mu^2 \quad \text{für} \quad E = \sum_{(p)} x_p^2 = 1,$$

d. h. *S hat in jedem Punkte außerhalb der reellen Achse ein von Null verschiedenes Minimum.*

Nun verwende ich nach Herrn *Hilb* die „*C. Neumannsche Potenzreihenentwicklung*“ in folgender Weise zur Darstellung der Reziproken S^{-1} von S:

---

*) Zitiert oben, S. 212. Anm. *).
) Zitiert oben, S. 214. Anm. *).
***) Vgl. *O. Toeplitz*, a. a. O., S. 109.

Es kommt darauf an, eine Form mit einem Minimum kleiner als 1 zu erhalten, nach deren ansteigenden Faltungen man dann S^{-1} entwickeln kann. Eine solche Form ist

$$S_1 = E - \alpha S, \tag{4.}$$

wo α irgendeine unterhalb des reziproken Maximums von $S(x)$ (für $\sum_{(p)} x_p^2 = 1$) und also auch unterhalb $\frac{1}{\mu^2}$ gelegene positive Zahl bedeutet:

$$0 < \alpha < \frac{1}{\operatorname{Max} S}; \tag{5.}$$

denn dann bleibt wegen (3.) tatsächlich αS stets zwischen $\alpha\mu^2$ und 1 und daher

$$0 \leqq S_1(x) \leqq 1 - \alpha\mu^2 < 1 \quad \text{für} \quad \sum_{(p)} x_p^2 = 1. \tag{4a.}$$

Nun folgt aber unmittelbar, *daß die Reziproke von* $S = \frac{1}{\alpha}(E - S_1)$ *gerade durch die folgende unendliche nach sukzessiven Faltungen von* S_1 *ansteigende Reihe dargestellt wird:*

$$S^{-1}(x) = \alpha\,(E(x) + S_1(x) + S_1^2(x) + S_1^3(x) + \cdots). \tag{6.}$$

Denn zunächst ist — immer für $\sum_{(p)} x_p^2 \leqq 1$ — nach (6b.) des § 1 $\operatorname{Max} S_1^n \leqq (\operatorname{Max} S_1)^n \leqq (1 - \alpha\mu^2)^n$, und daher bleibt der Rest unserer Reihe unterhalb $\frac{(1-\alpha\mu^2)^n}{\alpha\mu^2}$, d. h. die Reihe *konvergiert gleichmäßig* für alle jene Wertsysteme x_p und stellt daher offenbar auch eine beschränkte quadratische Form mit dem Maximum $\frac{1}{\alpha\mu^2}$ dar; nach einer Bemerkung auf S. 218 des § 1 ist obendrein jeder Summand der Reihe und daher auch diese selbst positiv definit, sodaß wir schließlich haben:

$$(6^{a}.) \qquad 0 \leqq S^{-1}(x) \leqq \frac{1}{\mu^2}.$$

Endlich aber findet man durch gliedweise Faltung, die wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe unmittelbar erlaubt ist:

$$\begin{aligned} S S^{-1} &= \frac{1}{\alpha}(E - S_1)\,\alpha\,(E + S_1 + S_1^2 + \cdots) \\ &= E + S_1 + S_1^2 + \cdots - (S_1 + S_1^2 + \cdots) = E, \quad \text{q. e. d.} \end{aligned}$$

Ist einmal ein bestimmter Wert α gewählt, so ergibt genau die gleiche Überlegung, daß die Reihe (6.) auch gleichmäßig in jedem Gebiete der λ-μ-Ebene konvergiert, in dem die Ungleichung (5.) erfüllt ist und μ obendrein oberhalb einer von Null verschiedenen Zahl bleibt. Ist nun M die obere Schranke von $|K(x)|$, so ist nach $(6^{b}.)$ des § 1 $S \leqq (M + |\lambda|)^2 + \mu^2$, und daher ist (5.) erfüllt, wenn:

$$(M + |\lambda|)^2 + \mu^2 \leqq \frac{1}{\alpha}.$$

Also konvergiert (6.) in jedem von einer Parallelen zur reellen λ-Achse und zwei Kreisbogen $(M \pm \lambda)^2 + \mu^2 = \frac{1}{\alpha}$ begrenzten Gebiete gleichmäßig; indem man α genügend klein macht, kann man dieses Gebiet beliebig groß machen und es insbesondere längs eines beliebig langen endlichen Stückes der λ-Achse ausdehnen.

Nunmehr schließen wir weiter, daß die Faltung

$$(7.) \qquad \mathsf{K}(\nu; x) = (K - \bar{\nu} E)\, S^{-1} = (K - \lambda E)\, S^{-1} + i\mu S^{-1}$$

die Reziproke von $K - \nu E$ selbst ist; denn es ist auf Grund des assoziativen Gesetzes der Faltungsoperation (§ 1, $(7^{b}.)$):

$$(K - \nu E)\,\mathsf{K} = (K - \nu E)\,(K - \bar{\nu} E)\, S^{-1} = S S^{-1} = E.$$

Man bestätigt unmittelbar, daß dies K eine symmetrische Form, d. h. daß die transponierte Form $\mathsf{K}' = S^{-1}(K - \bar{\nu} E) = \mathsf{K}$ ist; denn in der Reihe für S^{-1} treten nur Aggregate von $E, K, K^2, \ldots$ („ganze Funktionen von K“) auf, und je zwei solche Aggregate A, B sind, wie leicht zu sehen, vertauschbar, d. h. es ist $AB = BA$. Als obere Schranke von K erhalten wir nun, da nach (9ª.) des § 1:

$$|\mathsf{K}(\nu; x)|^2 \leqq S^{-1}(K - \nu E)(K - \bar{\nu} E) S^{-1} = S^{-1} S S^{-1} = S^{-1}$$

gilt, wegen (6ª.):

$$(7ª.) \qquad |\mathsf{K}(\nu; x)| \leqq \frac{1}{\mu}.$$

Damit ist aber bewiesen, *daß $K - \nu E$ für jedes komplexe ν mit Ausnahme höchstens der Stellen der reellen Achse eine beschränkte reziproke Form $\mathsf{K}(\nu; x)$ besitzt, die überdies noch bei Annäherung an die reelle Achse von nicht höherer als erster Ordnung unendlich wird* (d. h. $\mu \mathsf{K}(\nu; x)$ bleibt unter einer endlichen Grenze). Diese letzte Tatsache entspricht dem Satze der Elementarteilertheorie, daß eine reelle symmetrische Bilinearform nur *einfache* Elementarteiler hat. Man erkennt übrigens nun auch leicht, daß $\mathsf{K}(\nu; x)$ an jeder Stelle, wo es überhaupt existiert, *als beschränkte Reziproke* (d. h. durch die Gleichung (1.)) *bereits eindeutig bestimmt ist;* denn wäre $(K - \nu E)\mathsf{K}_1 = E$, so folgte durch vordere Faltung mit K (da wegen der Symmetrie von K $\mathsf{K}(K - \nu E) = E$ ist) unmittelbar $\mathsf{K}_1 = \mathsf{K}$*).

Es ist nun ferner sofort zu sehen, daß der Wert dieser Form $\mathsf{K}(\nu; x)$ für jedes bestimmte Wertsystem der x_p bzw. jeder einzelne ihrer Koeffizienten *im ganzen Existenzbereich eine reguläre analytische Funktion von ν* darstellt. Man kann nämlich in der Umgebung jeder Stelle ν_0, an der $\mathsf{K}(\nu_0; x) = \mathsf{K}_0$ als beschränkte Form existiert, die Reziproke durch folgende nach Potenzen von $\nu - \nu_0$ fortschreitende Reihe darstellen, deren Koeffizienten die sukzessiven Faltungen von K_0 sind:

$$(8.) \qquad \mathsf{K}(\nu; x) = \mathsf{K}_0(x) + (\nu - \nu_0)\mathsf{K}_0(x) + (\nu - \nu_0)^2 \mathsf{K}_0^2(x) + \cdots.$$

*) Vgl. *O. Toeplitz*, a. a. O., S. 106.

Denn einmal kann man genau wie bei (6.) zeigen, daß diese Reihe für $|\nu-\nu_0|<\frac{1}{\mathrm{Max}|\mathsf{K}_0|}$ absolut und gleichmäßig gegen eine beschränkte quadratische Form konvergiert, und andererseits bestätigt man durch gliedweise Faltung unter Berücksichtigung von $(K-\nu_0)\mathsf{K}_0=E$, daß tatsächlich vermöge (8.):

$$(K-\nu E)\,\mathsf{K}=(K-\nu_0 E)\,\mathsf{K}-(\nu-\nu_0)\,\mathsf{K}=(K-\nu_0 E)\,\mathsf{K}_0=E$$

wird, d. h. daß die Reihe (8.) wirklich die durch (1.) eindeutig definierte Reziproke darstellt.

In ganz analoger Weise können wir auch eine Reihenentwicklung von $\mathsf{K}(\nu;x)$ in der Umgebung des unendlichfernen Punktes angeben, und zwar ist diese

$$(9.)\qquad \mathsf{K}(\nu;x)=-\frac{E(x)}{\nu}-\frac{K(x)}{\nu^2}-\frac{K^2(x)}{\nu^3}-\cdots$$

unabhängig von der vorherigen Kenntnis von (7.), da für unendlich wachsende ν $\frac{1}{\nu}(K-\nu E)$ in die sich selbst reziproke Form E übergeht. Auf Grund wiederum der gleichen einfachen Abschätzung erkennt man, daß für $|\nu|>\mathrm{Max}|K|=M$, d. h. also außerhalb eines Kreises mit dem Radius M, (9.) gleichmäßig und absolut gegen eine beschränkte Form konvergiert, während durch gliedweise Faltung sofort wieder folgt:

$$(K-\nu E)\,\mathsf{K}=K\mathsf{K}-\nu\mathsf{K}=E.$$

Die Betrachtungen des folgenden abschließenden Paragraphen beruhen nun — kurz gesagt — darauf, daß $\mathsf{K}(\nu;x)$ als eine nicht identisch verschwindende für alle nichtreellen Werte und auch im Unendlichen reguläre analytische Funktion notwendig auf der reellen Achse im Endlichen Singularitäten (Punkte oder Linien) haben muß; ich werde ein Verfahren angeben, aus dem Verhalten von K in der Umgebung dieser Singularitäten

die Eigenformen und die Differentiallösungen herzustellen und ihre Existenz zu beweisen.

§ 9.

Verhalten der reziproken Form an der reellen Achse: das Spektrum.

Nähert sich ν der reellen Achse, so wird zwar $\mathsf{K}(\nu; x)$ durchaus keinen bestimmten Grenzwert besitzen müssen; da es aber dabei von höchstens *erster* Ordnung unendlich wird, so werden wir aus seinem parallel der reellen Achse erstreckten *Integrale* einen bestimmten endlichen Grenzwert ableiten können, der uns gerade die gewünschten Lösungen liefern wird. Setzen wir nun

$$(1.) \qquad \mathsf{K}(\nu; x) = \sum_{(p,\,q)} \varkappa_{pq}(\nu)\, x_p x_q,$$

wo jedes $\varkappa_{pq}(\nu)$ eine außerhalb der reellen Achse reguläre analytische Funktion ist, so können wir die Definitionsidentität (1.) des § 8 von K auflösen in die Koeffizientengleichungen:

$$(2.) \qquad \sum_{(a)} k_{pa} \varkappa_{aq}(\nu) - \nu \varkappa_{pq}(\nu) = \delta_{pq}. \qquad (p, q = 1, 2, \ldots)$$

Die Reihe linker Hand konvergiert in jedem um ein endliches Stück von der reellen Achse abstehenden Gebiete gleichmäßig (vgl. § 1, S. 215), da in ihm nach (7ª.) des § 8 $\mathsf{K}(\nu; x)$ und mithin auch $\sum_{(a)} x_a \varkappa_{aq}(\nu)$ eine von ν unabhängige endliche obere Schranke hat; also dürfen wir, wenn wir (2.) bei einem festen Werte von μ nach λ integrieren, die unendliche Reihe gliedweise integrieren und finden:

$$(3.) \qquad \sum_{(a)} k_{pa} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \varkappa_{aq}(\lambda + i\mu)\, d\lambda - \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} (\lambda + i\mu)\, \varkappa_{pq}(\lambda + i\mu)\, d\lambda = \delta_{pq}(\lambda_1 - \lambda_0). \qquad (p, q = 1, 2, \ldots)$$

Nun konvergiert aber nach einer Bemerkung von S. 216 auch die Reihe (1.) für den in Betracht kommenden Wertbereich von λ gleichmäßig, und daher ist für jedes Wertsystem x_p

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mathsf{K}(\nu;x)\,d\lambda = \sum_{(p,q)} x_p x_q \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \varkappa_{pq}(\nu)\,d\lambda;\quad \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \nu\,\mathsf{K}(\nu;x)\,d\lambda = \sum_{(p,q)} x_p x_q \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \nu\,\varkappa_{pq}(\nu)\,d\lambda;$$

diese Integrale stellen also offenbar beschränkte quadratische Formen dar. Wir können daher die Gleichungen (3.) zusammenfassen zu der Faltungsidentität:

$$K\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mathsf{K}(\lambda+i\mu;x)\,d\lambda - \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} (\lambda+i\mu)\,\mathsf{K}(\lambda+i\mu;x)\,d\lambda = (\lambda_1-\lambda_0)\,E(x).$$

Spalten wir hier K nach (7.) des § 8 in Real- und Imaginärteil, so ergeben die mit i multiplizierten Teile:

$$(4.)\qquad K\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mu S^{-1}\,d\lambda - \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda\,\mu S^{-1}\,d\lambda - \mu\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} (K-\lambda E)\,S^{-1}\,d\lambda = 0.$$

Indem wir nun in dieser Gleichung zur Grenze $\mu = 0$ übergehen, wird sich ergeben, daß die (notwendig existierenden) Grenzwerte des Integrales $\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mu S^{-1}\,d\lambda$ die Eigenformen bzw. Differentialeigenformen liefern. Tatsächlich sieht man ja zunächst ohne Rücksicht auf Konvergenz, daß (4.) in die die Differentialeigenformen definierende Identität rein formell übergeht — *sofern bei diesem Grenzprozeß das dritte Glied gegen Null konvergiert.* Es wird der erste Schritt unseres Beweisganges sein, diese Tatsache zu zeigen; dabei liegt die Bemerkung zugrunde, daß $(K-\lambda E)\,d\lambda$ wegen (2.) des § 8 nichts als das Differential von S selbst ist, so daß es sich einfach darum handelt, die Abschätzung des Integrales $\int \frac{ds}{s} = \log s$ in das Gebiet des Kalküls mit Bilinearformen (Matrizen) zu übertragen. Im einzelnen gestaltet sich die Abschätzung so: Wie oben (S. 262) bemerkt, kann man den Parameter α so klein wählen, daß die Reihe (6.) des § 8 für S^{-1} im ganzen Intervalle $\lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1$ und für einen festen Wert von μ gleichmäßig konvergiert, so daß man also das Integral

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}(K-\lambda E)S^{-1}d\lambda=\alpha\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}(K-\lambda E)\{E+(E-\alpha S)+(E-\alpha S)^2+\cdots\}d\lambda$$

gliedweise ausrechnen kann. Nun findet man durch direktes Ausrechnen, wenn man die Vertauschbarkeit je zweier „ganzer Funktionen" von K (vgl. S. 263) berücksichtigt:

$$\frac{\partial(E-\alpha S)^n}{\partial\lambda}=2\alpha n(K-\lambda E)(E-\alpha S)^{n-1},$$

und daher wird

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}(K-\lambda E)S^{-1}d\lambda=\frac{1}{2}\left[(E-\alpha S)+\frac{(E-\alpha S)^2}{2}+\frac{(E-\alpha S)^3}{3}+\cdots\right]_{\lambda=\lambda_0}^{\lambda=\lambda_1}.$$

Aus der Ungleichung (4ª.) des § 8 folgt nun sofort, daß die rechte Seite dem absoluten Betrage nach stets unterhalb

$$\frac{1}{2}\left[1-\alpha\mu^2+\frac{(1-\alpha\mu^2)^2}{2}+\frac{(1-\alpha\mu^2)^3}{3}+\cdots\right]=\frac{1}{2}\log\frac{1}{\alpha\mu^2}$$

bleibt; also ist stets

$$\text{(5.)}\qquad\left|\mu\int_{\lambda_0}^{\lambda}(K-\lambda E)S^{-1}d\lambda\right|<\frac{1}{2}\mu\log\frac{1}{\alpha\mu^2},$$

und dieses Integral konvergiert daher mit abnehmendem μ tatsächlich gleichmäßig gegen Null.

Wir haben nun zweitens zu untersuchen, was bei dem Grenzprozeß aus $\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\mu S^{-1}d\lambda$ wird; wir zeigen zunächst, *daß dieses längs eines hinreichend großen Intervalles erstreckte Integral stets einen endlichen und sogar von Null verschiedenen Grenzwert hat.* Wir bemerken sogleich, daß dabei immer nur das Intervall $(-M, +M)$ — unter M die obere Schranke

von $|K(x)|$ verstanden — in Betracht kommen kann; denn für $|\lambda + i\mu| > M$ bleibt $\mathsf{K}(\nu; x)$ regulär und daher auch $S^{-1} = \overline{\mathsf{K}}\mathsf{K}$ endlich, und $\underset{\mu=0}{L}\, \mu S^{-1}$ konvergiert gleichmäßig gegen Null. Zum Beweise der letzten Behauptung wenden wir nun den *Cauchy*schen Integralsatz auf das Gebiet der oberen Halbebene an, das von einem Halbkreise $\mathfrak{k}$ mit dem Radius $r > M$ und der Parallelen $\mathfrak{g}$ im Abstande ν zur reellen Achse begrenzt wird; in diesem Gebiete ist $\mathsf{K}(\nu; x)$ eine reguläre analytische Funktion von ν und daher ist das Randintegral:

$$\int_{(\mathfrak{g})} \mathsf{K}(\nu; x)\, d\lambda + \int_{(\mathfrak{k})} \mathsf{K}(\nu; x)\, d\nu = 0.$$

Lassen wir nun μ gegen Null konvergieren, so geht der imaginäre Teil des ersten Integrales in $\underset{\mu=0}{L} \int_{-M}^{+M} \mu S^{-1}\, d\lambda$ über; im zweiten Integral können wir für K die Entwicklung (9.) des § 8 einführen, so daß es, wenn wir noch $\nu = r e^{i\varphi}$ setzen, übergeht in

$$-\int_0^{\pi} \left\{ \frac{E(x)}{\nu} + \frac{K(x)}{\nu^2} + \frac{K(x)^2}{\nu^3} + \cdots \right\} i\nu\, d\varphi.$$

Da wir r beliebig groß nehmen können, wird das einfach gleich $-i\pi E(x)$ (d. i. im wesentlichen das Residuum von K im Unendlichen) und daher haben wir in der Tat

$$(6.) \qquad \underset{\mu=0}{L} \int_{-M}^{+M} \mu S^{-1}\, d\lambda = \pi E(x).$$

Nun könnte man weiterhin durch eine der Abschätzung (5.) ähnliche, nur etwas kompliziertere Betrachtung (eine Übertragung des Arcustangens-Integrales in den Matrizenkalkül) zeigen, *daß auch* $\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mu S^{-1}\, d\lambda$ *stets*

einen bestimmten Grenzwert für $\mu=0$ ***hat.*** Da aber μS^{-1} wesentlich positiv ist, so genügt die Formel (6.) bereits, um auf die Existenz eines bestimmten *Limes superior* des Integrales bei diesem Grenzprozeß zu schließen, der wegen (6.) zugleich eine *positiv definite und beschränkte (unterhalb* π *bleibende) quadratische Form der* x_p darstellen muß; setzen wir

$$(7.) \qquad \operatorname*{Lim\,sup}_{\mu=0} \int_{-M}^{\lambda} \mu S^{-1}(x)\, d\lambda = \sigma(\lambda; x),$$

so ist $\sigma(\lambda;x)$ bei festen x_p eine monotone Funktion von λ, die allerdings nicht notwendig stetig zu sein braucht. Man kann dann nach einem bekannten Verfahren sofort eine solche Folge von Werten μ angeben, daß für sie auch eine zugehörige gewöhnliche Limesgleichung (7.) für alle in Betracht kommenden Werte λ und x gilt, und es wären nur diese Werte μ im folgenden zu verwenden.

Nehmen wir nunmehr in (4.) den Grenzübergang vor, so konvergiert zunächst $K \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mu S^{-1} d\lambda$ gegen $K(\sigma(\lambda_1)-\sigma(\lambda_0))$; denn jeder Koeffizient jener Form ist seinerseits eine Linearform der Koeffizienten von $\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mu S^{-1} d\lambda$, und sein Grenzwert ergibt sich daher nach der „Vollstetigkeitseigenschaft“ der beschränkten Linearformen (§ 1, S. 215), indem man für diese Argumente ihre Grenzwerte einsetzt. Es bleibt nun nur noch der zweite Summand von (4.) zu behandeln, den wir durch Produktintegration umformen in

$$\left[\lambda \int_{-M}^{\lambda} \mu S^{-1} d\lambda\right]_{\lambda_0}^{\lambda_1} - \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mu S^{-1} d\lambda.$$

Der Grenzwert des ersten Gliedes hiervon läßt sich unmittelbar angeben; ferner aber konvergiert, wie man durch eine sehr einfache Konvergenzbetrachtung zeigen kann, falls eine Reihe monotoner Funktionen gegen eine endliche (monotone) Funktion konvergiert, auch ihr Integral gegen das Integral der Grenzfunktion, so daß $\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mu S^{-1} d\lambda$ den Grenzwert $\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sigma\, d\lambda$ besitzt. Daher geht unsere Gleichung (4.) schließlich über in

$$(8.) \qquad K(\sigma(\lambda_1;x)-\sigma(\lambda_0;x))-[\lambda\sigma(\lambda;x)]_{\lambda_0}^{\lambda_1}+\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\sigma(\lambda;x)\,d\lambda=0.$$

Damit ist nun aber unser Ziel erreicht:

Wegen (6.) kann nämlich $\sigma(\lambda;x)$ für kein Wertsystem der x konstant sein, da

$$(9.) \qquad \sigma(+M;x)-\sigma(-M;x)=\pi\sum_{(p)}x_p^2=\pi$$

ist. Nun wäre es einerseits möglich, daß es an einer Stelle λ_0 einen nicht identisch in den x_p verschwindenden endlichen Sprung $\Delta\sigma(x)\leqq\pi\sum_{(p)}x_p^2$ besitzt; dann folgt aus (8.), wenn wir das Intervall (λ_0, λ_1) um die Stelle λ_0 zusammenziehen:

$$(10.) \qquad K\Delta\sigma(x)-\lambda_0\Delta\sigma(x)=0 \quad \text{oder} \quad \sum_{(a)}k_{pa}\Delta\sigma_{aq}-\lambda_0\Delta\sigma_{pq}=0.$$

Da nun $\Delta\sigma$ nach der Annahme mindestens eine Zeile von nicht durchweg verschwindenden Koeffizienten hat, die zudem konvergente Quadratsumme besitzen, *so existiert eine nicht verschwindende Eigenform, und λ_0 ist ein Eigenwert der Form $K(x)$.* Wie man leicht sieht, fällt diese Annahme eines Sprunges von $\sigma(\lambda;x)$ damit zusammen, daß $\mathsf{K}(\nu;x)$ an der Stelle $\nu=\lambda_0$ einen Pol mit dem Residuum $\Delta\sigma(x)$ hat.

Existiert aber zweitens kein solcher Sprung, so muß es wegen (9.) mindestens ein Intervall (λ_0, λ_1) geben, in dem die stetige Funktion $\sigma(\lambda;x)$ stetig wächst; dann können wir wegen (3.) des § 4 die Gleichung (8.) auch schreiben:

$$(11.) \qquad \begin{gathered} K(\sigma(\lambda_1;x)-\sigma(\lambda_0;x))-\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\lambda\,d\sigma(\lambda;x)=0 \text{ oder} \\ \sum_{(a)}k_{pa}(\sigma_{aq}(\lambda_1)-\sigma_{aq}(\lambda_0))-\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\lambda\,d\sigma_{pq}(\lambda)=0. \end{gathered}$$

Da nun nach der Annahme mindestens in einer Zeile der Koeffizienten von $\sigma(\lambda;x)$ nicht alle Koeffizienten konstant sind, und da sie zudem eine konvergente Quadratsumme haben, so *existiert eine nicht identisch ver-*

schwindende Differentialeigenform, und das Intervall (λ_0, λ_1) *enthält gewiß Teile des Streckenspektrums der Form* K.

Damit ist der am Anfang von § 8 ausgesprochene Fundamentalsatz vollständig bewiesen.

Im allgemeinen wird natürlich $\sigma(\lambda; x)$ sowohl Sprünge, als auch Intervalle stetigen Wachstums haben; die ersteren geben die sämtlichen Eigenwerte, die letzteren die sämtlichen Streckenspektra von $K(x)$. Man kann nun aber ein Verfahren angeben, das aus $\sigma(\lambda; x)$ die sämtlichen einzelnen Eigenformen sowie die einzelnen Differentialeigenformen in der in Kap. II festgestellten Normierung herzustellen gestattet, und so auch die *Vielfachheit* des Spektrums liefert; was das Streckenspektrum angeht, so kommt hier gerade das in § 9 meiner Dissertation angegebene Verfahren in Betracht. Dieser Hinweis möge hier genügen, um anzudeuten, wie sich diese Betrachtungen des Kap. III auch zu einer vollständigen *Herstellung der sämtlichen Eigenformen* ausgestalten lassen.*)

Inhaltsübersicht.

Kap. I. Untersuchung des Punktspektrums.
§ 1. Fundamentaleigenschaften linearer und quadratischer Formen unendlichvieler Veränderlicher 213
§ 2. Eigenformen der quadratischen Form 221
Kap. II. Untersuchung des Streckenspektrums.
§ 3. Formen ohne Punktspektrum 231
§ 4. Hilfsätze über gewisse Integrale 234
§ 5. Eigenschaften der Differentiallösungen 240
§ 6. Systeme orthogonaler linearer Differentialformen 247
§ 7. Die Integraldarstellung der quadratischen Form für das Streckenspektrum 252
Kap. III. Die Existenz des Spektrums.
§ 8. Die reziproke Form von $K - \nu E$ als analytische Funktion von ν. 259
§ 9. Verhalten der reziproken Form an der reellen Achse: das Spektrum. 265

---

*) Vorstehende Abhandlung hat im März 1909 der Philosophischen Fakultät der Universität Marburg als Habilitationsschrift vorgelegen.

Über die Kongruenz $ax^e + by^e + cz^e \equiv 0 \pmod{p}$.

Von Herrn *A. Hurwitz* in Zürich.

Es liegt nahe, zu versuchen, den Beweis des „großen“ *Fermat*schen Satzes von der Unmöglichkeit der Gleichung

$$x^e + y^e + z^e = 0$$

dadurch zu führen, daß man die Existenz von unendlichvielen Primzahlen p nachweist, für welche die Kongruenz

$$x^e + y^e + z^e \equiv 0 \pmod{p}$$

nicht anders bestehen kann, als wenn eine der Zahlen x, y, z durch p teilbar ist. Herr *Dickson* hat nun im Bd. 135 dieses Journals mit Hilfe der Theorie der Kreisteilung gezeigt, daß dieser Weg ungangbar ist, daß nämlich die erwähnte Kongruenz, sobald p eine gewisse Grenze überschritten hat, stets Lösungen zuläßt, für welche keine der drei Zahlen x, y, z durch p teilbar ist.

Ich will nun in den folgenden Zeilen den allgemeineren Satz beweisen:

Es seien a, b, c ganze von Null verschiedene Zahlen, e eine ungerade Primzahl. Dann besitzt die Kongruenz

$$(1.) \qquad ax^e + by^e + cz^e \equiv 0 \pmod{p}$$

für jede Primzahl p, die eine gewisse Grenze übersteigt, eine solche Lösung, für welche keine der drei Zahlen x, y, z durch p teilbar ist.

Dabei werde ich den Beweis dieses Satzes mit ganz elementaren zahlentheoretischen Hilfsmitteln führen und z. B. von der Theorie der Kreisteilung keinen Gebrauch machen.

§ 1.

Sehr einfach gestaltet sich die Diskussion der Kongruenz (1.), wenn die Primzahl e kein Teiler von $p-1$, also zu $p-1$ teilerfremd ist. Man kann dann nämlich die positiven ganzen Zahlen r und s so bestimmen, daß

$$re = s(p-1)+1$$

wird, worauf für jede ganze Zahl ξ die Kongruenz

$$\xi \equiv \xi^{1+s(p-1)} \equiv (\xi^r)^e \pmod{p}$$

gilt. Da nun die Kongruenz

$$a\xi + b\eta + c\zeta \equiv 0 \pmod{p}$$

offenbar durch ganze, durch p nicht teilbare Zahlen ξ, η, ζ befriedigt werden kann, so wird die Kongruenz (1.) ebenfalls durch drei zu p teilerfremde Zahlen x, y, z, nämlich

$$x = \xi^r, \; y = \eta^r, \; z = \zeta^r$$

befriedigt werden können.

Es bleibt demnach nur zu beweisen, daß unter denjenigen Primzahlen p, für welche

$$(2.) \qquad p-1 = ef,$$

für die also $p-1$ durch e teilbar ist, sich nur endlichviele befinden können, für welche die Kongruenz (1.) nicht anders bestehen kann, als wenn wenigstens eine der Zahlen x, y, z durch p teilbar ist.

§ 2.

Bevor ich dieses beweise, will ich einige Bezeichnungen erklären, deren ich mich dabei bedienen werde.

Bedeutet n eine ganze Zahl, die positiv, negativ oder Null sein darf, so setze ich

$$\varphi(n) = 1 \text{ oder } = 0, \tag{3.}$$

je nachdem n durch p teilbar ist oder nicht. Diese zahlentheoretische Funktion $\varphi(n)$ gestattet es, in sehr bequemer Weise die Anzahl der Lösungen von Kongruenzen nach dem Modul p auszudrücken. Beispielsweise wird die Anzahl der Lösungen der Kongruenz (1.)

$$\mathfrak{A} = \sum_{x,y,z} \varphi(ax^e + by^e + cz^e) \tag{4.}$$

sein, wobei die Summationsbuchstaben x, y, z je ein vollständiges System zu p teilerfremder Reste durchlaufen müssen. Dabei habe ich nur solche Lösungen gezählt, bei welchen die drei Zahlen x, y, z nicht durch p teilbar sind, und zwei Lösungen (x, y, z) und (x', y', z') dann und nur dann als nicht verschieden angesehen, wenn $x' \equiv x, y' \equiv y, z' \equiv z \pmod{p}$ ist. Der zu beweisende Satz besagt nichts anderes, als daß

$$\mathfrak{A} > 0 \tag{5.}$$

ist, falls die Primzahl $p = ef + 1$ eine gewisse Grenze überschritten hat.

Aus der Bedeutung von $\varphi(n)$ geht unmittelbar hervor, daß

$$\varphi(kn) = \varphi(n) \text{ und } \varphi(pn) = 1 \tag{6.}$$

ist, unter n eine beliebige ganze Zahl, unter k eine durch p nicht teilbare ganze Zahl verstanden.

Ich erweitere ferner den Begriff der Kongruenz der Zahlen auf Zahlsysteme. Zwei Systeme

$$(t_1, t_2, \ldots t_r),\ (t_1', t_2', \ldots t_r')$$

von je r ganzen Zahlen will ich nämlich nach der positiven ganzen Zahl m als Modul kongruent nennen, in Zeichen

$$(7.) \qquad (t_1, t_2, \ldots t_r) \equiv (t_1', t_2', \ldots t_r') \pmod{m},$$

wenn die r Kongruenzen

$$(8.) \qquad t_1 \equiv t_1',\ t_2 \equiv t_2',\ \ldots\ t_r \equiv t_r' \pmod{m}$$

erfüllt sind. Die eine Kongruenz (7.) bedeutet also nichts anderes als die r Kongruenzen (8.). Von den Zahlsystemen

$$(9.) \qquad (t_1', t_2', \ldots t_r'),\ (t_1'', t_2'', \ldots t_r''), \ldots (t_1^{(s)}, t_2^{(s)}, \ldots t_r^{(s)})$$

sage ich, daß sie ein vollständiges System inkongruenter Zahlsysteme (mod. m) bilden, wenn jedes beliebig gewählte Zahlsystem $(t_1, t_2, \ldots t_r)$ einem und nur einem der Zahlsysteme (9.) nach dem Modul m kongruent ist, wenn also die Kongruenz

$$(t_1, t_2, \ldots t_r) \equiv (t_1^{(i)}, t_2^{(i)}, \ldots t_r^{(i)}) \pmod{m}$$

für einen und nur einen Index i besteht.

Durchläuft jede der Zahlen $t_1, t_2, \ldots t_r$ unabhängig von den anderen die Glieder eines Restsystems (mod. m), so entstehen im ganzen m^r Zahlsysteme $(t_1, t_2, \ldots t_r)$, die offenbar ein vollständiges System (9.) bilden. Hieraus ergibt sich leicht der Satz:

„*Die s Zahlsysteme* (9.) *werden stets und nur dann ein vollständiges System inkongruenter Zahlsysteme (mod. m) bilden, wenn ihre Anzahl $s = m^r$ ist und unter ihnen keine zwei (mod. m) kongruente vorhanden sind.*“

Eine spezielle Folgerung aus diesem Satz ist diese:

Durchläuft das Zahlsystem $(t_1, t_2, \ldots t_r)$ ein vollständiges System inkongruenter Zahlsysteme (mod. m), so gilt das nämliche von dem Zahlsysteme $(t_1 + t_r, t_2 + t_r, \ldots t_{r-1} + t_r, t_r)$.

§ 3.

Es sei nun g eine Primitivwurzel der Primzahl

$$p = ef + 1,$$

so daß die Potenzen

$$g^0 = 1, g, g^2, \ldots g^{p-2}$$

ein vollständiges System durch p nicht teilbarer Reste (mod. p) bilden.

Diejenigen, in endlicher Anzahl vorhandenen Primzahlen p, welche in einer der Zahlen a, b, c aufgehen, schließe ich von der weiteren Betrachtung aus, so daß

$$(10.) \qquad a \equiv g^{\alpha},\ b \equiv g^{\beta},\ c \equiv g^{\gamma} \pmod{p}$$

gesetzt werden kann.

Die Anzahl $\mathfrak{A}$ der Lösungen der Kongruenz (1.) drückt sich dann nach (4.) in der Form

$$(11.) \qquad \mathfrak{A} = \sum_{\xi, \eta, \zeta} \varphi(g^{e\xi+\alpha} + g^{e\eta+\beta} + g^{e\zeta+\gamma})$$

aus, wobei die Summationsbuchstaben ξ, η, ζ je ein vollständiges Restsystem (mod. $p-1$) durchlaufen müssen. Nun durchläuft

$$\xi = r_1 f + r$$

ein solches Restsystem, wenn r_1 ein vollständiges Restsystem (mod. e) und r ein solches (mod. f) durchläuft. Denn es entstehen auf diese Weise $ef = p-1$ Zahlen ξ, die untereinander (mod. $p-1$) inkongruent sind. Entsprechend kann man

$$\eta = s_1 f + s,\ \zeta = t_1 f + t$$

setzen. Da nun

$$g^{ef}=g^{p-1}\equiv 1 \pmod{p},$$

so geht durch diese Substitutionen die Gleichung (11.) in

$$(12.) \qquad \mathfrak{A}=e^3\sum_{r,s,t}\varphi\,(g^{er+\alpha}+g^{es+\beta}+g^{et+\gamma})$$

über, wobei nun die Summationsbuchstaben r, s, t je ein vollständiges Restsystem (mod. f) durchlaufen müssen. Da das Argument von φ sich (mod. p) nicht ändert, wenn r, s, t durch ihnen bezüglich (mod. f) kongruente Zahlen ersetzt werden, so darf die Summation in (12.) allgemeiner über irgendein vollständiges System (mod. f) inkongruenter Zahlentripel (r,s,t) erstreckt werden.

Es sei nun

$$(13.) \qquad [\alpha,\beta,\gamma]=\frac{1}{f}\sum_{r,s,t}\varphi\,(g^{er+\alpha}+g^{es+\beta}+g^{et+\gamma}),$$

so daß die Gleichung (12.) in

$$(14.) \qquad \mathfrak{A}=e^3f[\alpha,\beta,\gamma]=(p-1)e^2[\alpha,\beta,\gamma]$$

übergeht. Die Definition des Symboles $[\alpha,\beta,\gamma]$ verallgemeinere ich sogleich durch die Festsetzung, daß für r beliebige ganze Zahlen

$$\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_r$$

das Symbol $[\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_r]$ die Bedeutung

$$(15.) \quad [\alpha_1,\alpha_2,\dots\alpha_r]=\frac{1}{f}\sum\varphi\,(g^{et_1+\alpha_1}+g^{et_2+\alpha_2}+\dots+g^{et_r+\alpha_r})$$

haben soll, wobei die Summation über ein vollständiges System (mod. f) inkongruenter Zahlsysteme $(t_1,t_2,\dots t_r)$ zu erstrecken ist. Hiernach bezeichnet offenbar

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r]$$

den f-ten Teil der Anzahl derjenigen Glieder $(t_1, t_2, \ldots t_r)$ eines solchen vollständigen Systemes, für welche die Kongruenz

$$(16.) \qquad g^{et_1+\alpha_1} + g^{et_2+\alpha_2} + \cdots + g^{et_r+\alpha_r} \equiv 0 \pmod{p}$$

erfüllt ist.

In den Fällen $r = 1$ und $r = 2$ ist es leicht, den Wert des Symbols (15.) anzugeben. Da nämlich die Kongruenz

$$g^{et+\alpha} \equiv 0 \pmod{p}$$

niemals erfüllt ist, wird

$$(17.) \qquad [\alpha] = 0$$

sein. Ferner wird die Kongruenz

$$g^{et_1+\alpha_1} + g^{et_2+\alpha_2} \equiv 0 \pmod{p}$$

dann und nur dann erfüllt sein, wenn

$$(18.) \qquad et_1 + \alpha_1 \equiv et_2 + \alpha_2 + \frac{p-1}{2} \pmod{p-1}$$

ist. Da e ungerade ist, so wird $\frac{p-1}{2} = \frac{ef}{2}$ durch e teilbar (also f eine gerade Zahl) sein und die vorstehende Kongruenz erfordert

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod{e}$$

Ist letztere Bedingung erfüllt, so wird jedem Werte von t_2 eine (mod. f) bestimmte Zahl t_1 entsprechen, die der Kongruenz (18.) genügt. Hieraus folgt nun (wenn noch α, β statt α_1, α_2 geschrieben wird):

Man hat

$$(19.)' \qquad [\alpha, \beta] = 1 \text{ oder } = 0,$$

je nachdem die beiden Zahlen α, β *nach dem Modul* e *kongruent oder inkongruent sind.*

§ 4.

Die Zahlen $[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r]$ besitzen eine Reihe von Eigenschaften, zu deren Ableitung ich mich jetzt wende.

1. *Der Wert von* $[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r]$ *hängt in symmetrischer Weise von den Zahlen* $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$ *ab, ändert sich also nicht, wenn diese Zahlen irgendeiner Permutation unterworfen werden.*

2. *Sind die Zahlsysteme* $(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r)$ *und* $(\beta_1, \beta_2, \dots \beta_r)$ *kongruent (mod. e), d. h. ist*

$$\alpha_1 \equiv \beta_1, \alpha_2 \equiv \beta_2, \dots \alpha_r \equiv \beta_r \pmod{e},$$

so gilt

$$(20.) \qquad [\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r] = [\beta_1, \beta_2, \dots \beta_r].$$

In der Tat darf man in der Summe (15.) die Summationsbuchstaben $t_1, t_2, \dots t_r$ bez. ersetzen durch $t_1 + k_1, t_2 + k_2, \dots t_r + k_r$, unter $k_1, k_2, \dots k_r$ beliebig gewählte ganze Zahlen verstanden. Dies kommt aber darauf hinaus, die Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r$ durch die ihnen bez. (mod. e) kongruenten Zahlen $\alpha_1 + k_1 e, \alpha_2 + k_2 e, \dots \alpha_r + k_r e$ zu ersetzen.

3. *Bezeichnet* α *eine beliebige ganze Zahl, so ist*

$$(21.) \qquad [\alpha_1 + \alpha, \alpha_2 + \alpha, \dots \alpha_r + \alpha] = [\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r].$$

Denn die Summe (15.) ändert nicht ihren Wert, wenn man das Argument von φ mit der zu p teilerfremden Zahl g^α multipliziert.

Nimmt man $\alpha = -\alpha_r$, so folgt aus (21.)

$$(22.) \qquad [\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_{r-1}, \alpha_r] = [\alpha_1 - \alpha_r, \alpha_2 - \alpha_r, \dots \alpha_{r-1} - \alpha_r, 0].$$

4. *Die Zahl* $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r]$ *gibt an, wie viele (mod. f) inkongruente Zahlsysteme* $(t_1, t_2, \ldots t_{r-1})$ *die Kongruenz*

$$(23.)\quad g^{t_1 e + \alpha_1} + g^{t_2 e + \alpha_2} + \ldots + g^{t_{r-1} e + \alpha_{r-1}} + g^{\alpha_r} \equiv 0 \pmod{p}$$

befriedigen.

Nach der Bemerkung am Schluß von § 3 darf man nämlich in der Summe (15.) $t_1, t_2, \ldots t_{r-1}, t_r$ ersetzen durch $t_1 + t_r, t_2 + t_r, \ldots t_{r-1} + t_r, t_r$. Dadurch kommt

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r] = \frac{1}{f} \Sigma \varphi (g^{e t_r} (g^{e t_1 + \alpha_1} + g^{e t_2 + \alpha_2} + \ldots + g^{e t_{r-1} + \alpha_{r-1}} + g^{\alpha_r}))$$

$$= \Sigma \varphi (g^{e t_1 + \alpha_1} + g^{e t_2 + \alpha_2} + \ldots + g^{e t_{r-1} + \alpha_{r-1}} + g^{\alpha_r}),$$

wo nun die Summation über ein vollständiges System (mod. f) inkongruenter Zahlsysteme $(t_1, t_2, \ldots t_{r-1})$ auszudehnen ist. Diese Darstellung von $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r]$ beweist die aufgestellte Behauptung. Beiläufig folgt, daß die Zahlen $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r]$ nicht negative ganze Zahlen sind.

5. *Die Zahl* $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r]$ *gibt auch an, wie viele (mod. f) inkongruente Zahlsysteme* $(t_1, t_2, \ldots t_{r-1})$ *die Kongruenz*

$$(24.)\quad g^{t_1 e + \alpha_1} + g^{t_2 e + \alpha_2} + \ldots + g^{t_{r-1} e + \alpha_{r-1}} \equiv g^{\alpha_r} \pmod{p}$$

befriedigen.

Nach dem vorhergehenden Satze ist nämlich die in Rede stehende Anzahl von Zahlsystemen $(t_1, t_2, \ldots t_{r-1})$ gleich $\left[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{r-1}, \alpha_r + \frac{p-1}{2}\right]$, weil

$$g^{\alpha_r + \frac{p-1}{2}} \equiv -g^{\alpha_r} \pmod{p}$$

ist. Da aber $\frac{p-1}{2} = \frac{ef}{2}$ ein Multiplum von e ist, so wird nach (2.)

$$\left[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{r-1}, \alpha_r + \frac{p-1}{2}\right] = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r].$$

6. *Es seien*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_s$$

$r+s$ *beliebige ganze Zahlen. Dann gilt die Gleichung*

$$(25.)\quad [\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_s] = f[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r][\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_s] + \sum_{\varrho} [\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r, \varrho][\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_s, \varrho],$$

wobei der Summationsbuchstabe ϱ *ein vollständiges Restsystem (mod. e) zu durchlaufen hat.*

Um den Beweis hierfür zu erbringen, zerlege ich die

$$f[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_s]$$

Lösungssysteme $(t_1, t_2, \ldots t_r, u_1, u_2, \ldots u_s)$ der Kongruenz

$$g^{t_1 e + \alpha_1} + \cdots + g^{t_r e + \alpha_r} + g^{u_1 e + \beta_1} + \cdots + g^{u_s e + \beta_s} \equiv 0 \pmod{p}$$

in p Gruppen, indem ich ein Lösungssystem in die erste, oder zweite,... oder p-te Gruppe rechne, je nachdem für dasselbe

$$g^{t_1 e + \alpha_1} + \cdots + g^{t_r e + \alpha_r} \equiv 0 \text{ oder } \equiv g^0, \ldots \text{ oder } \equiv g^{p-2} \pmod{p}$$

ist. Für die Lösungssysteme innerhalb derselben Gruppe ist dann bezüglich

$$g^{u_1 e + \beta_1} + \cdots + g^{u_s e + \beta_s} \equiv 0 \text{ oder } \equiv -g^0, \ldots \text{ oder } \equiv -g^{p-2} \pmod{p}.$$

In Rücksicht auf die Sätze 4 und 5 finde ich so:

$$f[\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_s] = f^2[\alpha_1, \ldots \alpha_r][\beta_1, \ldots \beta_s] + \sum_{\lambda} [\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r, \lambda][\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_s, \lambda],$$

wo λ ein Restsystem (mod. $p-1$) durchläuft. Nun setze ich

$$\lambda = te+\varrho$$

und lasse t ein Restsystem (mod. f) und ϱ ein Restsystem (mod. e) durchlaufen. Dann geht die vorstehende Gleichung nach Division durch f in die zu erweisende Gleichung (25.) über. Diese Gleichung gibt übrigens, wenn $r=1$ oder $s=1$ ist, vermöge der Relationen (19.) eine nichtssagende Identität. Der erste Fall, welcher Interesse bietet, entspricht daher der Annahme $r=s=2$. In diesem Falle lautet die Gleichung (25.), wenn die Zahlen β_1, β_2 jetzt durch α_3, α_4 bez. bezeichnet werden:

$$(26.)\quad [\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]=f[\alpha_1,\alpha_2][\alpha_3,\alpha_4]+[\alpha_1,\alpha_2,0][\alpha_3,\alpha_4,0]$$
$$+[\alpha_1,\alpha_2,1][\alpha_2,\alpha_3,1]+\cdots+[\alpha_1,\alpha_2,e-1][\alpha_3,\alpha_4,e-1].$$

Vermöge dieser Gleichung werden die „viergliedrigen" Zahlen $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$ durch „dreigliedrige" dargestellt. (Die Werte der zweigliedrigen Zahlen $[\alpha_1,\alpha_2]$ und $[\alpha_3,\alpha_4]$ sind nach Gleichung (19.) bekannt.) Offenbar kann man mit Hilfe der Gleichung (25.) überhaupt alle Zahlen

$$[\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_r]$$

für $r\geqq 4$ durch die dreigliedrigen Zahlen ausdrücken.

7. *Es seien wieder*

$$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_r,\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_s$$

irgend $r+s$ *ganze Zahlen, und es durchlaufe* ϱ *ein Restsystem nach dem Modul* e. *Dann gilt die folgende Gleichung:*

$$(27.)\quad \sum_{\varrho}[\alpha_1+\varrho,\alpha_2+\varrho,\ldots\alpha_r+\varrho,\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_s]$$
$$=(p-1)[\alpha_1,\ldots\alpha_r][\beta_1,\ldots\beta_s]+(f^{r-1}-[\alpha_1,\ldots\alpha_r])(f^{s-1}-[\beta_1,\ldots\beta_s]).$$

Bezeichnet S die auf der linken Seite stehende Summe, so ist nach Satz (4.)

$$S = \Sigma\varphi\,(g^{t_1 e + a_1 + \varrho} + \dots + g^{t_r e + a_r + \varrho} + g^{u_1 e + \beta_1} + \dots + g^{u_{s-1} e + \beta_{s-1}} + g^{\beta_s}),$$

wobei die Summation über $t_1, t_2, \dots t_r, u_1, \dots u_{s-1}, \varrho$ auszudehnen ist. Ich ersetze nun, was offenbar erlaubt ist, $t_1, t_2, \dots t_{r-1}$ bez. durch $t_1 + t_r$, $t_2 + t_r, \dots t_{r-1} + t_r$. Dadurch kommt

$$S = \Sigma\varphi\,(\lambda A + B),$$

wobei

$$\lambda = g^{t_r e + \varrho},\ A = g^{t_1 e + a_1} + \dots + g^{t_{r-1} e + a_{r-1}} + g^{a_r},$$

$$B = g^{u_1 e + \beta_1} + \dots + g^{u_{s-1} e + \beta_{s-1}} + g^{\beta_s}$$

gesetzt ist. Durchläuft nun t_r ein Restsystem (mod. f) und ϱ ein Restsystem (mod. e), so durchläuft $t_r e + \varrho$ ein Restsystem (mod. $ef = p-1$) und folglich λ ein vollständiges System durch p nicht teilbarer Reste (mod. p). Die Summe S läßt sich demnach so bilden, daß man λ ein solches Restsystem (mod. p) (also z. B. die Zahlen $1, 2, \dots p-1$) und $t_1, t_2, \dots t_{r-1}$, $u_1, \dots u_{s-1}$ je ein vollständiges Restsystem (mod. f) durchlaufen läßt.

Nun wird für eine bestimmte Kombination $t_1, \dots t_{r-1}, u_1, \dots u_{s-1}$

$$\lambda A + B$$

durch p teilbar sein

a) für alle $p-1$ Werte von λ, wenn

$$A \equiv 0,\ B \equiv 0 \pmod{p};$$

b) für einen der $p-1$ Werte von λ, wenn

$$A \not\equiv 0,\ B \not\equiv 0 \pmod{p};$$

c) für keinen der $p-1$ Werte von λ in jedem anderen Falle.

Der Fall a) tritt für

$$[\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r]\,[\beta_1, \beta_2, \dots \beta_s]$$

Kombinationen $t_1, \dots t_{r-1}, u_1, \dots u_{s-1}$ ein, der Fall b) für

$$(f^{r-1} - [\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r])\,(f^{s-1} - [\beta_1, \beta_2, \dots \beta_s])$$

Kombination $t_1, \dots t_{r-1}, u_1, \dots u_{s-1}$. Demnach ist

$$S = (p-1)[\alpha_1, a_2, \dots \alpha_r][\beta_1, \beta_2, \dots \beta_s] + (f^{r-1} - [\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_r])\,(f^{s-1} - [\beta_1, \beta_2, \dots \beta_s]),$$

w. z. b. w.

In den Fällen $r = 1$ und $r = 2$ nimmt die Gleichung (27.) mit Berücksichtigung von (17.) und (19.) folgende Formen an:

$$(28.) \qquad \sum_{\varrho=0}^{e-1} [\alpha_1 + \varrho, \beta_1, \dots \beta_s] = f^{s-1} - [\beta_1, \dots \beta_s],$$

$$(29.) \qquad \sum_{\varrho=0}^{e-1} [\alpha_1 + \varrho, \alpha_2 + \varrho, \beta_1, \dots \beta_s] = \begin{cases} f\,(f^{s-1} - [\beta_1, \dots \beta_s]), \\ \qquad \text{wenn } \alpha_1 \not\equiv \alpha_2 \pmod{e}, \\ (f-1)\,f^{s-1} + (p-f)\,[\beta_1, \dots \beta_s], \\ \qquad \text{wenn } \alpha_1 \equiv \alpha_2 \pmod{e}. \end{cases}$$

§ 5.

Unter n und m irgend zwei ganze Zahlen verstanden, betrachte ich nun die Summe

$$(30.) \qquad a_{n,m} = \sum_{\varrho} [\varrho, m + n\varrho, 0],$$

in welcher ϱ ein Restsystem (mod. e) (also z. B. die Zahlen $0, 1, 2, \dots e-1$) durchlaufen soll.

Der Wert von $a_{n,m}$ ist eine nicht negative ganze Zahl und ändert sich offenbar nicht, wenn n und m durch ihnen bez. (mod. e) kongruente Zahlen ersetzt werden.

Überdies gilt noch die Gleichung

$$a_{n,m} = a_{1-n,m}. \tag{31.}$$

In der Tat ist nach Gleichung (21.)

$$a_{n,m} = \Sigma[0, m+n\varrho-\varrho, -\varrho] = \Sigma[-\varrho, m+n\varrho-\varrho, 0],$$

und die letztere Summe geht, wenn man ϱ durch $-\varrho$ ersetzt, in $a_{1-n,m}$ über.

Der Wert von $a_{0,m}$ ergibt sich sofort aus Gleichung (28.), indem man in ihr $s=2$ und $\alpha_1=0, \beta_1=m, \beta_2=0$ setzt. Man findet so

$$a_{0,m} = a_{1,m} = f-[m,0] = \begin{cases} f, & \text{wenn } m \not\equiv 0 \pmod{e}, \\ f-1, & \text{wenn } m \equiv 0 \pmod{e}. \end{cases} \tag{32.}$$

Zwischen den Zahlen $a_{n,m}$ herrschen nun merkwürdige quadratische Relationen, die sich auf folgende Weise ergeben:

Es sei

$$s_{n,m} = \sum_{\varrho} a_{n,\varrho}\, a_{n,\varrho+m}, \tag{33.}$$

wo ϱ ein Restsystem (mod. e) durchlaufen soll. Setzt man nun gemäß (30.)

$$a_{n,\varrho} = \sum_{\sigma}[\sigma, \varrho+n\sigma, 0],$$

$$a_{n,\varrho+m} = \sum_{\tau}[\tau, \varrho+m+n\tau, 0],$$

so kommt

$$s_{n,m} = \sum_{\varrho,\sigma,\tau}[\sigma, \varrho+n\sigma, 0][\tau, \varrho+m+n\tau, 0], \tag{34.}$$

wo die Summationsbuchstaben ϱ, σ, τ je ein Restsystem (mod. e) zu durchlaufen haben.

Beachtet man nun, daß (nach § 4, Satz 1 und 3)

$$[\sigma, \varrho + n\sigma, 0][\tau, \varrho + m + n\tau, 0] = [\sigma - n\sigma, \varrho, -n\sigma][\tau - m - n\tau, \varrho, -m - n\tau]$$
$$= [\sigma - n\sigma, -n\sigma, \varrho][\tau - m - n\tau, -m - n\tau, \varrho]$$

ist, so erkennt man, daß die Summation nach ϱ vermöge der Gleichung (26.) ausgeführt werden kann. Man hat in dieser Gleichung $\alpha_1 = \sigma - n\sigma$, $\alpha_2 = -n\sigma$, $\alpha_3 = \tau - m - n\tau$, $\alpha_4 = -m - n\tau$ zu nehmen.

Da hierbei $[\alpha_1, \alpha_2] = [\sigma, 0]$, $[\alpha_3, \alpha_4] = [\tau, 0]$ wird, so geht die Gleichung (34.) über in

$$s_{n,m} = \sum_{\sigma,\tau} \{[\sigma - n\sigma, -n\sigma, \tau - m - n\tau, -m - n\tau] - f[\sigma, 0][\tau, 0]\}$$

oder, unter Anwendung der Gleichungen (19.) und (21.):

$$s_{n,m} = \sum_{\sigma,\tau} [\sigma, 0, \tau + n(\sigma - \tau) - m, n(\sigma - \tau) - m] - f.$$

Die Summation kann hier so ausgeführt werden, daß man (σ, τ) ein vollständiges System inkongruenter Zahlenpaare (mod. e) durchlaufen läßt. Daher darf man auch τ durch $\sigma - \tau$ ersetzen, denn gleichzeitig mit (σ, τ) durchläuft auch $(\sigma, \sigma - \tau)$ ein solches vollständiges System von Zahlenpaaren.

Somit ist

$$s_{n,m} = \sum_{\varrho,\tau} [\sigma, 0, \sigma - \tau + n\tau - m, n\tau - m] - f.$$

Hier findet nun bei der Summation nach σ die Gleichung (27.) Anwendung, in welcher $r = s = 2$ und

$$\alpha_1 = -\tau + n\tau - m, \quad \alpha_2 = 0, \quad \beta_1 = n\tau - m, \quad \beta_2 = 0$$

zu nehmen ist. So findet sich weiter

$$s_{n,m} = \sum_{\tau} \{(p-1)[(n-1)\tau - m, 0][n\tau - m, 0]$$
$$+ (f - [(n-1)\tau - m, 0])(f - [n\tau - m, 0])\} - f.$$

Jetzt nehme ich an, daß n weder $\equiv 0$ noch $\equiv 1 \pmod{e}$ sei. Dann wird im allgemeinen

$$[n\tau - m, 0] = [(n-1)\tau - m, 0] = 0,$$

und nur für *einen* Wert von τ, nämlich für denjenigen, welcher die Kongruenz $n\tau - m \equiv 0 \pmod{e}$ befriedigt,

$$[n\tau - m, 0] = 1,$$

und ebenfalls nur für *einen* Wert von τ, nämlich für denjenigen, welcher die Kongruenz $(n-1)\tau - m \equiv 0 \pmod{e}$ befriedigt,

$$[(n-1)\tau - m, 0] = 1$$

sein. Diese beiden besonderen Werte von τ sind voneinander verschieden, wenn m nicht $\equiv 0 \pmod{e}$ ist, dagegen fallen sie zusammen, wenn $m \equiv 0 \pmod{e}$ ist.

Demnach ergibt sich für die Summe $s_{n,m}$, falls m nicht durch e teilbar ist,

$$s_{n,m} = (e-2)f^2 + 2f(f-1) - f = (ef-3)f = (p-4)f;$$

dagegen kommt, falls m durch e teilbar ist,

$$s_{n,m} = (p-1) + (f-1)^2 + (e-1)f^2 - f = (p-4)f + p.$$

Es gilt demnach der folgende Satz:

Zwischen den Zahlen $a_{n,m}$, *die durch Gleichung* (30.) *definiert werden, bestehen die quadratischen Relationen:*

$$(35.) \qquad a_{n,0}\, a_{n,m} + a_{n,1}\, a_{n,m+1} + \cdots + a_{n,e-1}\, a_{n,m+e-1} = (p-4)f,$$

$$(36.) \qquad a_{n,0}^2 + a_{n,1}^2 + \cdots + a_{n,e-1}^2 = (p-4)f + p.$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß weder n *noch* $n-1$ *durch* e *teilbar ist und daß die in der Relation* (35.) *auftretende Zahl* m *ebenfalls nicht durch* e *teilbar ist.*

Aus den Relationen (35.) und (36.) folgt unmittelbar die weitere

$$(37.) \qquad (a_{n,0} - a_{n,m})^2 + (a_{n,1} - a_{n,m+1})^2 + \cdots + (a_{n,e-1} - a_{n,m+e-1})^2 = 2p,$$

in welcher n und m nur der Bedingung unterliegen, daß n, m, $n-1$ durch e nicht teilbar sein dürfen. Die Zahlen $a_{n,m}$ ergeben also eine gewisse Anzahl von Darstellungen der Zahl $2p$ als Summe von e Quadraten.

Schließlich bemerke ich noch, daß für jeden Index n die Gleichung besteht

$$(38.) \qquad a_{n,0} + a_{n,1} + \cdots + a_{n,e-1} = p-2.$$

In der Tat ist nach (30.) und (28.)

$$\sum_{\varrho=0}^{e-1} a_{n,\varrho} = \sum_{\varrho,\sigma} [\sigma, \varrho + n\sigma, 0] = \sum_{\sigma} \{f - [\sigma, 0]\} = ef - 1 = p-2.$$

§ 6.

Bezeichne jetzt r einen bestimmten Index. Die Zahl $a_{n,r}$ kommt dann auf der linken Seite der Relation (37.) in den beiden Gliedern

$$(a_{n,r} - a_{n,r+m})^2, \quad (a_{n,r-m} - a_{n,r})^2$$

vor. Es ist aber

$$(a_{n,r} - a_{n,r+m})^2 + (a_{n,r-m} - a_{n,r})^2 = 2\left\{\left(a_{n,r} - \frac{a_{n,r+m} + a_{n,r-m}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_{n,r+m} - a_{n,r-m}}{2}\right)^2\right\}.$$

Die Relation (37.) kann ich daher so schreiben:

$$\left(a_{n,r} - \frac{a_{n,r+m} + a_{n,r-m}}{2}\right)^2 + P = p,$$

wo P eine Summe von nicht negativen Termen bezeichnet; ja es muß sogar $P > 0$ (nicht $= 0$) sein weil p als Primzahl keinem Quadrat gleich sein kann.

Es folgt hieraus, daß $a_{n,r} - \frac{a_{n,r+m} + a_{n,r-m}}{2}$ absolut genommen kleiner als $\sqrt{p}$ ist; d. h.:

Ist n weder $\equiv 0$ *noch* $\equiv 1 \pmod{e}$, *ferner m nicht* $\equiv 0 \pmod{e}$, *r aber beliebig, so gilt die Beziehung*

$$(39.) \qquad -\sqrt{p} < a_{n,r} - \frac{a_{n,r+m} + a_{n,r-m}}{2} < \sqrt{p}.$$

Hier setze ich der Reihe nach $m = 1, 2, \ldots e-1$ und summiere die $e-1$ dadurch entstehenden Beziehungen. Da nach (38.)

$$\sum_{m=1}^{e-1} \frac{a_{n,r+m} + a_{n,r-m}}{2} = \sum_{m=0}^{e-1} \frac{a_{n,r+m} + a_{n,r-m}}{2} - a_{n,r} = \frac{1}{2}\left(\sum_{\varrho=0}^{e-1} a_{n,\varrho} + \sum_{\varrho=0}^{e-1} a_{n,\varrho}\right) - a_{n,r}$$

$$= p - 2 - a_{n,r}$$

ist, so kommt

$$(40.) \qquad -(e-1)\sqrt{p} < e a_{n,r} - (p-2) < (e-1)\sqrt{p},$$

oder:

Ist n weder $\equiv 0$, *noch* $\equiv 1 \pmod{e}$, *r aber beliebig, so gilt die Beziehung*

$$(41.) \qquad (p-2) - (e-1)\sqrt{p} < e a_{n,r} < (p-2) + (e-1)\sqrt{p}.$$

§ 7.

Aus den Zahlen $a_{n,m}$ lassen sich nun die Zahlen $[\alpha, \beta, \gamma]$ zusammensetzen, wodurch es möglich wird, die Beziehung (41.) auf die letzteren

Zahlen zu übertragen. Durchläuft n ein Restsystem (mod. e), so ist zufolge der Definitionsgleichung (30.)

$$\sum_n a_{n,\,\alpha-n\beta} = \sum_{\varrho,\,n} [\varrho,\ \alpha-n\beta+n\varrho,\ 0].$$

Summiert man zunächst über n bei festgehaltenem ϱ, so ist zu unterscheiden, ob $\varrho \equiv \beta \pmod{e}$ ist, oder nicht. Im ersteren Falle ist beständig

$$\alpha-n\beta+n\varrho \equiv \alpha \pmod{e},$$

während im zweiten Falle $\alpha-n\beta+n\varrho = \sigma$ gleichzeitig mit n ein Restsystem (mod. e) durchläuft. Demnach kommt

$$\sum_n a_{n,\,\alpha-n\beta} = e\,[\beta,\ \alpha,\ 0] + \sum_{\varrho}{}' \sum_{\sigma} [\varrho,\ \sigma,\ 0],$$

wo das Komma am Summenzeichen bedeutet, daß ϱ ein Restsystem (mod. e) mit Ausschluß des Restes $\varrho \equiv \beta \pmod{e}$ durchlaufen soll.

Nach Gleichung (28.) ist nun

$$\sum_{\sigma} [\varrho,\ \sigma,\ 0] = f-[\varrho,\ 0]$$

und offenbar

$$\sum_{\varrho}{}' \{f-[\varrho,\ 0]\} = (e-1)f+[\beta,\ 0]-1 = p-2-f+[\beta,\ 0].$$

Hiernach wird jetzt

$$\sum_n a_{n,\,\alpha-n\beta} = e[\beta,\ \alpha,\ 0]+p-2-f+[\beta,\ 0].$$

Von der Summe trenne ich die $n=0$ und $n=1$ entsprechenden Glieder ab, deren Werte nach (32.)

$$a_{0,\,\alpha} = f-[\alpha,\ 0],\quad a_{1,\,\alpha-\beta} = f-[\alpha-\beta,\ 0] = f-[\alpha,\ \beta]$$

sind. Auf diese Weise kommt:

$$\sum_{n=2}^{e-1} a_{n,\,\alpha-n\beta} + 3f - (p-2) - [\alpha, 0] - [\alpha, \beta] - [\beta, 0] = e[\beta, \alpha, 0].$$

Schließlich setze ich noch $\alpha-\gamma$ für α und $\beta-\gamma$ für β und finde so:

Die Zahl $[\alpha, \beta, \gamma]$ *läßt sich durch die Zahlen* $a_{n,m}$ *ausdrücken vermöge der Gleichung*

$$(42.) \qquad e\,[\alpha, \beta, \gamma] = 3f + 2 - p - [\alpha, \beta] - [\beta, \gamma] - [\gamma, \alpha] + \sum_{n=2}^{e-1} a_{n,\,\alpha-\gamma+n(\beta-\gamma)}.$$

Hier bedeuten α, β, γ drei beliebige ganze Zahlen, und nach (19.) ist

$$[\alpha, \beta] + [\beta, \gamma] + [\gamma, \alpha] = 0 \text{ oder } 1 \text{ oder } 3,$$

je nachdem α, β, γ untereinander inkongruent (mod. e), oder zwei unter diesen Zahlen einander kongruent (mod. e) oder endlich alle drei einander kongruent (mod. e) sind.

Die Beziehung (41.) liefert nun für die in (42.) auftretende Summe die Grenzen

$$\frac{e-2}{e}[(p-2) \mp (e-1)\sqrt{p}],$$

und da

$$e(3f + 2 - p) = 3(p-1) - e(p-2)$$

ist, so ergibt sich der Satz:

Für die Zahl $[\alpha, \beta, \gamma]$ *gilt die Beziehung*

$$(43.) \qquad p + 1 - (e-1)(e-2)\sqrt{p} - \eta e < e^2[\alpha, \beta, \gamma] < p + 1 + (e-1)(e-2)\sqrt{p} - \eta e,$$

wobei

$$\eta = [\alpha, \beta] + [\beta, \gamma] + [\gamma, \alpha]$$

gleich 0 *oder* 1 *oder* 3 *ist, je nachdem die drei Zahlen* α, β, γ *untereinander inkongruent (mod. e), oder zwei unter diesen Zahlen einander kongruent (mod. e) oder alle drei einander kongruent (mod. e) sind.*

Für die Anzahl $\mathfrak{A}$ der Lösungen der Kongruenz

$$ax^e + by^e + cz^e \equiv 0 \pmod{p}$$

in durch p nicht teilbaren Zahlen x, y, z folgt insbesondere nach (14.)

$$\frac{\mathfrak{A}}{p-1} > p + 1 - (e-1)(e-2)\sqrt{p} - \eta e$$

und daher

$$\mathfrak{A} > 0,$$

sobald die Primzahl p eine gewisse von e abhängende Grenze überschritten hat.

Die Beziehung (43.) zeigt des näheren, daß die Anzahl $\mathfrak{A}$ mit p derart ins Unendliche wächst, daß

$$\operatorname{Lim} \frac{\mathfrak{A}}{p^2} = 1$$

ist.

Zum letzten *Fermat*schen Theorem.

Von Herrn *Arthur Wieferich* in Münster i. W.

Im 128. Bande dieses Journals (1905, S. 45—68) hat Herr *Mirimanoff* als sog. *Kummer*sches Kriterium folgenden Satz formuliert:

Wenn die *Fermat*sche Gleichung

$$x^p + y^p + z^p = 0$$

bei ungeraden Primzahlexponenten durch zu p prime x, y, z lösbar sein soll, so müssen die Kongruenzen

$$\varphi_i B_{\frac{p-i}{2}} \equiv 0 \pmod{p} \tag{1.}$$

befriedigt werden für $i = 3, 5, \ldots p-2$, wobei

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{j-1} t^j j^{i-1} \tag{2.}$$

ist und B_i die i-te *Bernoulli*sche Zahl bedeutet. In der vorliegenden Arbeit soll nunmehr nachgewiesen werden, daß das Bestehen der Kongruenzen (1.) notwendig die Kongruenz

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$$

nach sich zieht.

§ 1.

Es ist

$$(3.) \qquad te^v - t^p e^{pv} = (1+te^v)\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i-1}t^i e^{iv}.$$

Die x-te Ableitung von (3.) nach v wird alsdann für $v=0$

$$t - t^p p^x = (1+t)\varphi_{x+1} + \binom{x}{1}t\varphi_x + \binom{x}{2}t\varphi_{x-1} + \cdots + \binom{x}{x-1}t\varphi_2 + \binom{x}{x}t\varphi_1.$$

Setze ich noch $\frac{1+t}{t} = \vartheta$, so erhalte ich leicht das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\vartheta\varphi_{x+1} + \binom{x}{1}\varphi_x + \binom{x}{2}\varphi_{x-1} + \cdots + \binom{x}{x-1}\varphi_2 + \binom{x}{x}\varphi_1 &= 1 - t^{p-1}p^x,\\
\vartheta\varphi_x + \binom{x-1}{1}\varphi_{x-1} + \cdots + \binom{x-1}{x-2}\varphi_2 + \binom{x-1}{x-1}\varphi_1 &= 1 - t^{p-1}p^{x-1},\\
\vartheta\varphi_{x-1} + \cdots + \binom{x-2}{x-3}\varphi_2 + \binom{x-2}{x-2}\varphi_1 &= 1 - t^{p-1}p^{x-2},\\
\cdots\cdots\cdots

Multipliziere ich die Reihen obiger Determinante der Reihe nach mit $1, x, x(x-1), \ldots, x(x-1)\cdots 3\cdot 2, x(x-1)\cdots 2\cdot 1$, so erhalte ich

$$\Delta_{x+1} x^x (x-1)^{x-1} \cdots 2^2 \cdot 1 = \begin{vmatrix} 1-t^{p-1}p^x & \binom{x}{1} & \binom{x}{2} & \cdots & \binom{x}{x} \\ (1-t^{p-1}p^{x-1})x & \vartheta x & \binom{x-1}{1}x \ldots & \binom{x-1}{x-1}x & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ (1-t^{p-1}p^2)x(x-1)\cdots 3 & 0 & 0 \ldots & \binom{2}{2}x(x-1)\cdots 3 & \\ (1-t^{p-1}p)\,x(x-1)\cdots 2 & 0 & 0 \ldots & \binom{1}{1}x(x-1)\cdots 2 & \\ (1-t^{p-1}) \quad x(x-1)\cdots 1 & 0 & 0 \ldots & \vartheta x(x-1)\cdots 1 & \end{vmatrix}.$$

Setze ich jetzt aus den Kolonnen der Reihe nach die Faktoren $1, x, x(x-1), \ldots x(x-1)\cdots 2\cdot 1$ heraus, so wird, wenn ich noch zur Abkürzung

$$\frac{1}{\tau!} = \alpha_\tau$$

setze,

$$\Delta_{x+1} = \begin{vmatrix} 1-t^{p-1}p^x & \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_{x-1} & \alpha_x \\ (1-t^{p-1}p^{x-1})x & \vartheta & \alpha_1 \ldots \alpha_{x-2} & \alpha_{x-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (1-t^{p-1}p^2)x(x-1)\cdots 3 & 0 & 0 \ldots \alpha_1 & \alpha_2 \\ (1-t^{p-1}p)x(x-1)\cdots 2 & 0 & 0 \ldots \vartheta & \alpha_1 \\ (1-t^{p-1})x(x-1)\cdots 1 & 0 & 0 \ldots 0 & \vartheta \end{vmatrix}.$$

Es sei nun

$$(6.) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \ldots & \alpha_{i-1} & \alpha_i \\ \vartheta & \alpha_1 \ldots & \alpha_{i-2} & \alpha_{i-1} \\ 0 & \vartheta \ldots & \alpha_{i-3} & \alpha_{i-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \ldots & \vartheta & \alpha_1 \end{vmatrix} = F_i$$

gesetzt. Dann wird

$$\begin{aligned}\Delta_{x+1} &= (1-t^{p-1}p^x)\,\vartheta^x - x(1-t^{p-1}p^{x-1})\,\vartheta^{x-1}F_1 + \cdots \\ &\quad + (-1)^{x-1}x(x-1)\cdots 3\cdot 2(1-t^{p-1}p)\,\vartheta F_{x-1} \\ &\quad + (-1)^x x(x-1)\cdots 2\cdot 1(1-t^{p-1})\,F_x,\end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned}\Delta_{x+1} &= x!\,\{\alpha_x\vartheta^x - \alpha_{x-1}\vartheta^{x-1}F_1 + \alpha_{x-2}\vartheta^{x-2}F_2 + \cdots + (-1)^{x-2}\alpha_2\vartheta^2 F_{x-2} \\ &\qquad + (-1)^{x-1}\alpha_1\vartheta F_{x-1} + (-1)^x F_x\} \\ &\quad - t^{p-1}\{p^x\vartheta^x - xp^{x-1}\vartheta^{x-1}F_1 + x(x-1)p^{x-2}\vartheta^{x-2}F_2 - \cdots \\ &\quad + (-1)^{x-1}x(x-1)\cdots 3\cdot 2p\,\vartheta F_{x-1} + (-1)^x x(x-1)\cdots 2\cdot 1\,F_x\}.\end{aligned} \tag{7.}$$

Aus (6.) ergibt sich nun leicht, daß allgemein

$$\begin{aligned}F_i &= \alpha_1 F_{i-1} - \alpha_2\vartheta F_{i-2} + \alpha_3\vartheta^2 F_{i-3} - \cdots + (-1)^{i-2}\alpha_{i-1}\vartheta^{i-2}F_1 \\ &\qquad + (-1)^{i-1}\alpha_i\vartheta^{i-1}\end{aligned} \tag{8.}$$

ist. Es ist also

$$\begin{aligned}\alpha_x\vartheta^x - \alpha_{x-1}\vartheta^{x-1}F_1 + \cdots + (-1)^{x-2}\alpha_2\vartheta^2 F_{x-2} + (-1)^{x-1}\alpha_1\vartheta F_{x-1} \\ = (-1)^{x-1}\vartheta F_x.\end{aligned}$$

Folglich wird

$$\begin{aligned}\Delta_{x+1} &= x!\,\{(-1)^{x-1}\vartheta F_x + (-1)^x F_x\} \\ &\quad - t^{p-1}\{p^x\vartheta^x - \cdots + (-1)^{x-1}x(x-1)\cdots 2p\,\vartheta F_{x-1} \\ &\qquad + (-1)^x x(x-1)\cdots 2\cdot 1\,F_x\} \\ &= (-1)^{x-1}x!\,\{\vartheta - 1 + t^{p-1}\}\,F_x \\ &\quad - t^{p-1}\{p^x\vartheta^x - \cdots + (-1)^{x-1}x(x-1)\cdots 2p\,\vartheta F_{x-1}\}.\end{aligned}$$

Es werde nun vorausgesetzt, daß

$$t \text{ weder } \equiv 0 \text{ noch } \equiv -1 \pmod{p}$$

ist. Weiterhin ist leicht zu sehen, daß F_i für $i<p$ nie die Zahl p im Nenner haben kann. Demnach wird, da $t^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ist,

$$(9.) \qquad \Delta_{x+1} \equiv (-1)^{x-1} x! \, \vartheta F_x \pmod{p}$$

für $x = 1, 2, \ldots p-1$.

Aus (5.) und (9.) ergibt sich endlich

$$(10.) \qquad \varphi_{x+1} \equiv \frac{(-1)^{x-1} x! \, F_x}{\vartheta^x} \pmod{p}.$$

§ 2.

Es sei

$$(11.) \qquad G_i = \begin{vmatrix} \binom{x}{1} & \binom{x}{2} & \ldots & \binom{x}{i-1} & \binom{x}{i} \\ \vartheta & \binom{x-1}{1} & \ldots & \binom{x-1}{i-2} & \binom{x-1}{i-1} \\ 0 & \vartheta & \ldots & \binom{x-2}{i-3} & \binom{x-2}{i-2} \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & \binom{x-i+2}{1} & \binom{x-i+2}{2} \\ 0 & 0 & \ldots & \vartheta & \binom{x-i+1}{1} \end{vmatrix}.$$

Dann finde ich leicht, indem ich wie in § 1 verfahre, daß

$$G_i = \frac{x!}{(x-i)!} F_i$$

ist, d. h. daß

$$(12.) \qquad G_i \equiv (-1)^{i-1} \binom{x}{i} \vartheta^i \varphi_{i+1} \pmod{p}$$

ist.

Speziell für $i = \varkappa$ ergibt sich

$$(11^{a}.) \qquad G_\varkappa = \begin{vmatrix} \binom{\varkappa}{1} & \binom{\varkappa}{2} & \dots & \binom{\varkappa}{\varkappa-1} & \binom{\varkappa}{\varkappa} \\ \vartheta & \binom{\varkappa-1}{1} & \dots & \binom{\varkappa-1}{\varkappa-2} & \binom{\varkappa-1}{\varkappa-1} \\ 0 & \vartheta & \dots & \binom{\varkappa-2}{\varkappa-3} & \binom{\varkappa-2}{\varkappa-2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} \\ 0 & 0 & \dots & \vartheta & \binom{1}{1} \end{vmatrix}$$

und

$$(12^{a}.) \qquad G_\varkappa \equiv (-1)^{\varkappa-1} \vartheta^\varkappa \varphi_{\varkappa+1} \pmod{p}.$$

Addiere ich jetzt in (11ª.) die resp. mit $\lambda^{\varkappa-1}$, $\lambda^{\varkappa-2} \dots \lambda^2$, λ multiplizierten Kolonnen zur letzten Kolonne, so erhalte ich

$$G_\varkappa = \begin{vmatrix} \binom{\varkappa}{1} & \binom{\varkappa}{2} & \dots & \binom{\varkappa}{\varkappa-1} & (1+\lambda)^\varkappa - \lambda^\varkappa \\ \vartheta & \binom{\varkappa-1}{1} & \dots & \binom{\varkappa-1}{\varkappa-2} & (1+\lambda)^{\varkappa-1} - \lambda^{\varkappa-1} + \vartheta\lambda^{\varkappa-1} \\ 0 & \vartheta & \dots & \binom{\varkappa-2}{\varkappa-3} & (1+\lambda)^{\varkappa-2} - \lambda^{\varkappa-2} + \vartheta\lambda^{\varkappa-2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \binom{2}{1} & (1+\lambda)^2 - \lambda^2 + \vartheta\lambda^2 \\ 0 & 0 & \dots & \vartheta & (1+\lambda) - \lambda + \vartheta\lambda \end{vmatrix},$$

wobei λ eine beliebige Zahl ist.

Setze ich noch

$$(13.) \qquad (1+\lambda)^i - \lambda^i + \vartheta\lambda^i = (1+\lambda)^i + (\vartheta-1)\lambda^i = H_{i+1},$$

so wird

$$G_\varkappa = (-1)^{\varkappa-1}\vartheta^{\varkappa-1}(H_{\varkappa+1} - \vartheta\lambda^\varkappa) + (-1)^{\varkappa-2}\vartheta^{\varkappa-2}H_\varkappa G_1 + \dots$$
$$+ \vartheta^2 H_4 G_{\varkappa-3} - \vartheta H_3 G_{\varkappa-2} + H_2 G_{\varkappa-1},$$

d. h. nach (12.) und (12ª.)

$$-\vartheta\varphi_{x+1}\equiv -H_{x+1}+\vartheta\lambda^x+\binom{x}{1}H_x\varphi_2+\binom{x}{2}H_{x-1}\varphi_3+\cdots$$
$$+\binom{x}{x-3}H_4\varphi_{x-2}+\binom{x}{x-2}H_3\varphi_{x-1}+\binom{x}{x-1}H_2\varphi_x \pmod{p}. \tag{14.}$$

§ 3.

Ich summiere jetzt die Kongruenzen (14.) über

$$\lambda=0,-1,2,-3,\ldots p-1,-p.$$

Setze ich zur Abkürzung

$$\begin{cases} 1^{2j-1}-2^{2j-1}+3^{2j-1}-\cdots-(p-1)^{2j-1}+p^{2j-1}=\mathfrak{B}_{2j} \\ \\ 1^{2j}+2^{2j}+3^{2j}+\cdots+(p-1)^{2j}+p^{2j}=S_{2j+1}, \end{cases} \tag{15.}$$

so erhalte ich leicht

$$\begin{cases} \sum\limits_{\lambda=0,-1,2,\ldots-p} H_{2j}=(2-\vartheta)\mathfrak{B}_{2j}, \\ \\ \sum\limits_{\lambda=0,-1,2,\ldots-p} H_{2j+1}=\vartheta S_{2j+1}, \\ \\ \sum\limits_{\lambda=0,-1,2,\ldots-p} \lambda^x=\begin{matrix} S_{x+1} \\ -\mathfrak{B}_{x+1} \end{matrix}\Big\}, \text{ je nachdem } x\begin{cases}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{cases}\text{ ist.} \end{cases} \tag{16.}$$

Ersetze ich noch x durch $2x-1$, so erhalte ich endlich

$$-\vartheta\varphi_{2x}\equiv -2\mathfrak{B}_{2k}+\binom{2x-1}{1}\vartheta S_{2x-1}\varphi_2+\binom{2x-1}{2}(2-\vartheta)\mathfrak{B}_{2x-2}\varphi_3$$
$$+\cdots+\binom{2x-1}{2x-3}\vartheta S_3\varphi_{2x-2}+\binom{2x-1}{2x-2}(2-\vartheta)\mathfrak{B}_2\varphi_{2x-1}. \tag{17.}$$

Es ist nun

$$S_{2j+1} \equiv 0 \pmod{p},$$

ferner bekanntlich

$$\mathfrak{B}_{2j} \equiv (-1)^{j-1} B_j \frac{2^{2j}-1}{j} \pmod{p},$$

wo B_j die j-te *Bernoulli*sche Zahl bedeutet.

Die Kongruenz (17.) geht demnach über in

$$-\vartheta \varphi_{2k} \equiv -2\mathfrak{B}_{2\varkappa} + \binom{2\varkappa-1}{2}(2-\vartheta) B_{\varkappa-1} \varphi_3 \frac{2^{2\varkappa-2}-1}{\varkappa-1} + \cdots + \binom{2\varkappa-1}{2\varkappa-2}(2-\vartheta) B_1 \varphi_{2\varkappa-1} \frac{2^2-1}{1},$$

oder, wenn ich noch $\varkappa = \frac{p-1}{2}$ setze,

$$(18.) \quad -\vartheta \varphi_{p-1} \equiv -2\mathfrak{B}_{p-1} + (2-\vartheta)\left\{\binom{p-2}{2} B_{\frac{p-3}{2}} \frac{2^{p-3}-1}{\frac{p-3}{2}} \varphi_3 + \cdots + \binom{p-2}{p-3} B_1 \frac{2^2-1}{1} \varphi_{p-2}\right\}.$$

Wir wollen nunmehr annehmen, daß die Kongruenzen (1.)

$$\varphi_i B_{\frac{p-i}{2}} \equiv 0 \pmod{p}$$

sämtlich erfüllt seien, daß also

$$\varphi_3 B_{\frac{p-3}{2}} \equiv 0,$$

$$\varphi_5 B_{\frac{p-5}{2}} \equiv 0,$$

$$\vdots$$

$$\varphi_{p-4} B_2 \equiv 0,$$

$$\varphi_{p-2} B_1 \equiv 0$$

sei. Dann liefert also (18.) die Kongruenz

$$\vartheta\varphi_{p-1} \equiv 2\mathfrak{B}_{p-1} \pmod{p}. \tag{19.}$$

Es ist nun nach (2.)

$$\varphi_{p-1} = \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^{j-1} t^j j^{p-2},$$

d. h.

$$\varphi_{p-1} \equiv t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \cdots - \frac{1}{p-1}\, t^{p-1}$$

$$\equiv \frac{1}{p}\left\{\binom{p}{1}t + \binom{p}{2}t^2 + \binom{p}{3}t^3 + \cdots + \binom{p}{p-1}t^{p-1}\right\}$$

$$\equiv \frac{(1+t)^p - 1 - t^p}{p} \pmod{p}.$$

Es läßt sich nun leicht zeigen, daß $\varphi_{p-1} \equiv 0$ sein muß modulo p, daß also $(1+t)^p - 1 - t^p$ durch p^2 teilbar sein muß. Es ist nämlich t das Verhältnis zweier der Größen x, y, z, etwa $t = \frac{y}{x}$.

Dann wird

$$\varphi_{p-1} \equiv \frac{(x+y)^p - x^p - y^p}{p\,x^p},$$

d. h. da $x+y+z \equiv 0 \pmod{p}$, gleich Ap ist,

$$\varphi_{p-1} \equiv \frac{(Ap-z)^p - x^p - y^p}{p\,x^p} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Es muß daher auch

$$\mathfrak{B}_{p-1} \equiv 0 \pmod{p} \tag{20.}$$

sein. Es ist aber

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_{p-1} &\equiv 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{p-1}\\ &\equiv \frac{1}{p}\left\{\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+\binom{p}{3}+\cdots+\binom{p}{p-1}\right\}\\ &\equiv \frac{2^p-2}{p} \pmod{p}.\end{aligned}$$

Da die Werte $t\equiv 0$ und $t\equiv -1$ nicht in Betracht kommen wegen der Annahme, daß x, y, z prim zu p sind, so ergibt sich also ganz allgemein, daß das Bestehen der Kongruenzen (1.) die Kongruenz

$$2^{p-1}\equiv 1 \pmod{p^2}$$

bedingt.

Zur Dreiecksgeometrie.

Von Herrn *Arthur Wieferich* in Münster i. W.

Im folgenden sollen einige Sätze mitgeteilt werden, die auf gewisse Punkte und Geraden führen, zwischen denen eine ähnliche Beziehung besteht, wie zwischen den beim *Pascal*schen Sechseck auftretenden Punkten und Geraden, und die auch mit diesen in bestimmter Verbindung stehen.

1. Werden die Seiten eines Dreiecks von einer Geraden geschnitten, und die zu den Schnittpunkten und je zwei Ecken zugeordneten vierten harmonischen Punkte mit den Gegenecken verbunden, so schneiden sich diese drei Geraden in einem Punkte, dem Pole der betreffenden Geraden (Harmonikale) in bezug auf das Dreieck.

2. Die Pole der Geraden eines Strahlenbüschels in bezug auf ein Dreieck liegen auf einem diesem Dreiecke umbeschriebenen Kegelschnitte.

3. Jeder Geraden als Ort der Mittelpunkte von Strahlenbüscheln entspricht in bezug auf ein Dreieck ein diesem Dreiecke umbeschriebenes

1. Verbindet man einen Punkt in der Ebene eines Dreiecks mit seinen Ecken und konstruiert zu diesen Strahlen die zugeordneten vierten harmonischen in bezug auf die anliegenden Dreiecksseiten, so liegen die Schnittpunkte dieser Strahlen mit den Gegenseiten auf einer Geraden, der Harmonikalen des betreffenden Punktes (Pol) in bezug auf das Dreieck.

2. Die Harmonikalen der Punkte einer Geraden in bezug auf ein Dreieck umhüllen einen diesem Dreiecke einbeschriebenen Kegelschnitt.

3. Jedem Punkte als gemeinsamem Schnittpunkte der durch ihn hindurchgehenden Geraden entspricht in bezug auf ein Dreieck eine diesem

Kegelschnittsbüschel, das außerdem noch durch den Pol der betreffenden Geraden als vierten Punkt hindurchgeht.

Dreiecke einbeschriebene Kegelschnittschar, die außerdem noch die Harmonikale des betreffenden Punktes als vierte Gerade berührt.

4. Dem Schnittpunkte zweier Geraden entspricht in bezug auf ein Dreieck ein diesem Dreiecke umbeschriebener Kegelschnitt, der außerdem durch die Pole der beiden Geraden hindurchgeht.

4. Der Verbindungsgeraden zweier Punkte entspricht in bezug auf ein Dreieck ein diesem Dreiecke einbeschriebener Kegelschnitt, der außerdem die Harmonikalen der beiden Punkte berührt.

Hieraus folgt:

5. Konstruiert man zu je zweien von fünf Punkten die Harmonikalen in bezug auf das von den drei andern gebildete Dreieck, so ist der Ort der Pole der Strahlen des durch diese beiden Harmonikalen bestimmten Strahlenbüschels der den fünf Punkten einbeschriebene Kegelschnitt.

5. Konstruiert man zu je zweien von fünf Geraden die Pole in bezug auf das von den drei andern gebildete Dreieck, so umhüllen die Harmonikalen der Punkte der durch diese beiden Pole bestimmten Punktreihe den den fünf Geraden einbeschriebenen Kegelschnitt.

6. Um ein Sechseck läßt sich ein Kegelschnitt beschreiben, wenn die Harmonikalen irgend dreier Eckpunkte in bezug auf das von den drei andern gebildete Dreieck sich in einem Punkte schneiden.

6. In ein Sechseck läßt sich ein Kegelschnitt beschreiben, wenn die Pole irgend dreier Seiten in bezug auf das von den drei andern gebildete Dreieck auf einer Geraden liegen.

7. Teile ich sechs auf der Peripherie eines Kegelschnittes liegende Punkte beliebig in zwei Gruppen zu je drei Punkten und nehme diese als Ecken zweier Dreiecke, I und II, so

schneiden sich die Harmonikalen der Eckpunkte des Dreieckes II in bezug auf I in einem Punkte ω, und die der Eckpunkte von I in bezug

liegen die Pole der Seiten des Dreieckes II in bezug auf I auf einer Geraden g, und ebenso die der Seiten von I in bezug auf II auf einer

auf II in einem Punkte ω' (Gegenpunkt des Punktes ω). Ich erhalte also 20 derartige Punkte, resp. 10 derartige Punktepaare.

zweiten Geraden g'. Ich erhalte also 20 derartige Geraden resp. 10 derartige Geradenpaare.

8. Lasse ich nunmehr stets eines der beiden Teildreiecke, d. h. die Reihenfolge der Ecken dieses Dreieckes, ungeändert, permutiere dagegen die Eckpunkte des andern, so erhalte ich zwei Gruppen von je drei verschiedenen Sechsecken, deren *Pascal*sche Geraden sich in dem *Steiner*schen Punktepaare S und S' schneiden, und für die die entsprechenden *Kirkmann*schen Punkte auf dem *Cagley*schen Geradenpaare l und l' liegen.

Alsdann

liegen die Punkte S und S', ω und ω' auf einer Geraden, und zwar so, daß die Punkte S und S' durch ω und ω' harmonisch getrennt werden.

schneiden sich die Geraden l und l', g und g' in einem Punkte, und zwar so, daß die Geraden l und l' durch g und g' harmonisch getrennt werden.

9. Zwischen entsprechenden Punkten ω und Geraden g besteht dieselbe polare Beziehung (nämlich in bezug auf den Kegelschnitt, für den beide zugehörigen Teildreiecke Polardreiecke sind), wie sie auch zwischen den *Pascal*schen Geraden, *Steiner*schen Punkten, *Plücker*schen Geraden einerseits und den entsprechenden *Kirkmann*schen Punkten, *Cayley*schen Geraden und *Salmon*schen Punkten andererseits besteht.

Möglicherweise lassen sich auch noch für die Punkte ω und die Geraden g ähnliche Beziehungen finden, wie sie die *Plücker*schen Geraden, resp. *Salmon*schen Punkte darbieten, doch konnte ich solche bisher nicht entdecken.

Über simultane lineare Differentialgleichungen.

Zusatz zu den Abhandlungen des Verfassers in den Bänden 131, 133 dieses Journals.

Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.

Es wird hier für die Determinante eines Fundamentalsystems von Lösungen simultaner homogener linearer Differentialgleichungen ein anderer Ausdruck gegeben als derjenige ist, welcher aus dem Differentialquotienten des Logarithmus der Determinante hervorgeht. *Die Bestimmung des konstanten Faktors* in letzterem Ausdruck ist in dem anderen Ausdruck enthalten.

Bei einer einzelnen homogenen linearen Differentialgleichung m-ter Ordnung war die Determinante von m linearunabhängigen Integralen und ihren $m-1$ ersten Ableitungen Differentialdeterminante genannt worden (Abh. d. Verfassers Bd. 96 Nr. 14, Bd. 115 S. 136 d. Journals).

Wenn der in Abh. Bd. 131 behandelte Fall vorliegt, daß die Integration des Systems simultaner homogener linearer Differentialgleichungen auf diejenige einer einzigen einzelnen homogenen linearen Differentialgleichung zurückkommt, so war dort in Nr. 4 I der Ausdruck der Determinante eines Fundamentalsystems von Lösungen durch den Quotienten gegeben: Differentialdeterminante der Integrale jener einzelnen Differentialgleichung dividiert durch eine bekannte rational aus den Koeffizienten des Systems und deren Ableitungen zusammengesetzte Determinante.

Entsprechend ergibt sich nun für den in Abhandl. Bd. 133 untersuchten allgemeinen Fall, wobei zur Integration sukzessive eine oder mehrere einzelne homogene lineare Differentialgleichungen mit bekannten Koeffizienten auftreten, daß der Ausdruck der Determinante eines Fundamentalsystems von Lösungen als folgendes *Produkt* erscheint: Jeder Faktor desselben ist die Differentialdeterminante der Integrale je einer der vor-

kommenden einzelnen homogenen linearen Differentialgleichungen dividiert durch eine bekannte rational aus den Koeffizienten des Systems und deren Ableitungen bei Bildung jener einzelnen Differentialgleichung hervorgehenden Determinante.

1.

Das System simultaner homogener linearer Differentialgleichungen aus Abh. Bd. 133 Nr. 1 (1.) liegt vor.

Ein Fundamentalsystem von Lösungen desselben geht in folgender Weise hervor, vgl. Abh. Bd. 133 Nr. 4 I:

Die einzelne homogene lineare Differentialgleichung Abhandl. Bd. 133 Nr. 1 (16.) λ-ter Ordnung mit bekannten Koeffizienten habe die λ linearunabhängigen Integrale

$$(1.) \qquad y_\varrho. \qquad (\varrho=1,\dots\lambda)$$

y_ϱ wird in das System Abh. Bd. 133 Nr. 1 (18.) eingesetzt, dann sei eine Lösung dieses Systems t_ϱ bis z_ϱ.

$y_{\lambda+\varrho}$ werde gleich Null gesetzt. Ein Fundamentalsystem von Lösungen des Systems simultaner homogener linearer Differentialgleichungen mit bekannten Koeffizienten Abh. Bd. 133 Nr. 1 (24.) sei

$$(2.) \qquad t_{\lambda+\varrho},\dots z_{\lambda+\varrho}. \qquad (\varrho=1,\dots m-\lambda)$$

Die zusammengehörigen Werte y_k, t_k bis z_k $(k=1,\dots m)$ werden in den Ausdruck Abh. Bd. 133 Nr. 1 (17.) eingesetzt, nämlich in den Ausdruck

$$(3.) \qquad \frac{1}{D_{\lambda-1}}\Big\{h_{r0}y + h_{r1}\frac{dy}{dx} + \dots + h_{r,\lambda-1}\frac{d^{\lambda-1}y}{dx^{\lambda-1}} + h_{r\lambda}t + \dots + h_{r,m-1}z\Big\}. \qquad (r=1,\dots\lambda-1)$$

Hierdurch ergeben sich die $\lambda-1$ Ausdrücke u_k bis s_k $(k=1,\dots m)$. In (3.) ist $D_{\lambda-1}$ eine nicht verschwindende Determinante, die aus den Koeffizienten des Systems bei Herstellung der oben genannten einzelnen homogenen linearen Differentialgleichung für y a. a. O. Nr. 1 (16.) hervorgeht.

Dann bilden

$$(4.) \qquad y_k, u_k, \ldots s_k, t_k, \ldots z_k \qquad (k=1, \ldots m)$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen des Systems a. a. O. Nr. 1, (1.).

2.

Die Determinante Δ dieses Fundamentalsystems ist

$$(1.) \qquad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_\lambda & 0 & \ldots 0 \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_\lambda & u_{\lambda+1} & \ldots u_m \\ \vdots & & & & & \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_\lambda & s_{\lambda+1} & \ldots s_m \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_\lambda & t_{\lambda+1} & \ldots t_m \\ \vdots & & & & & \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_\lambda & z_{\lambda+1} & \ldots z_m \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante zerfällt in das Produkt der beiden Determinanten

$$(2.) \qquad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_\lambda & 0 & \ldots 0 \\ \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} & \ldots & \frac{dy_\lambda}{dx} & 0 & \ldots 0 \\ \vdots & & & & & \\ \frac{d^{\lambda-1}y_1}{dx^{\lambda-1}} & \frac{d^{\lambda-1}y_2}{dx^{\lambda-1}} & \ldots & \frac{d^{\lambda-1}y_\lambda}{dx^{\lambda-1}} & 0 & \ldots 0 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_\lambda & t_{\lambda+1} & \ldots t_m \\ \vdots & & & & & \\ z_1 & z_2 & \ldots & z_\lambda & z_{\lambda+1} & \ldots z_m \end{vmatrix},$$

$$(3.) \qquad \frac{1}{D_{\lambda-1}^{\lambda-1}} \begin{vmatrix} 1 & h_{10} & \ldots & h_{\lambda-1,0} & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & h_{11} & \ldots & h_{\lambda-1,1} & 0 & 0 \ldots 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & h_{1,\lambda-1} & \ldots & h_{\lambda-1,\lambda-1} & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & h_{1,\lambda} & \ldots & h_{\lambda-1,\lambda} & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & h_{1,\lambda+1} & \ldots & h_{\lambda-1,\lambda+1} & 0 & 1 \ldots 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & h_{1,m-1} & \ldots & h_{\lambda-1,m-1} & 0 & 0 \ldots 1 \end{vmatrix}.$$

Die Determinante (2.) ist gleich dem Produkte der Differentialdeterminante der Integrale Nr. 1 (1.) der Differentialgleichung a. a. O. Nr. 1 (16.) — diese Determinante sei durch $D(y)$ bezeichnet — und der Determinante

$$(4.) \qquad \begin{vmatrix} t_{\lambda+1} \dots t_m \\ \vdots \\ z_{\lambda+1} \dots t_m \end{vmatrix}.$$

Dies ist die Determinante eines Fundamentalsystems von Lösungen des Systems simultaner homogener linearer Differentialgleichungen mit bekannten Koeffizienten a. a. O. Nr. 1 (24.). Diese Determinante sei durch Δ_1 bezeichnet.

Die Determinante (3.) ist gleich

$$(5.) \qquad \frac{1}{D_{\lambda-1}^{\lambda-1}} \begin{vmatrix} h_{1\lambda} & \dots h_{\lambda-1,1} \\ \vdots & \\ h_{1,\lambda-1} \dots & h_{\lambda-1,\lambda-1} \end{vmatrix}.$$

Dieselbe ist gemäß den $\lambda-1$ ersten Gleichungen a. a. O. N. 1 (8.) gleich

$$\frac{1}{D_{\lambda-1}}.$$

Die Determinante (1.) Δ wird also

$$(6.) \qquad \Delta = \frac{D(y)}{D_{\lambda-1}} \Delta_1.$$

Bei $\lambda = 1$ kommt der Ausdruck Nr. 1 (3.) nicht vor; t fällt mit u zusammen. $D(y)$ wird y_1 und Δ wird

$$(7.) \qquad \Delta = \frac{D(y)}{1} \Delta_1.$$

Bei $\lambda = m$ kommen die Ausdrücke Nr. 1 (2.) nicht vor; s fällt mit z zusammen. Es wird

$$(8.) \qquad \Delta = \frac{D(y)}{D_{m-1}};$$

dies ist der Fall aus Abh. Bd. 131 Nr. 4 I.

Auf die Determinante Δ_1 finden nun dieselben Betrachtungen Anwendung.

Also wird Δ gleich dem Quotienten:

Produkt der Differentialdeterminanten der Integrale der eingehenden einzelnen homogenen linearen Differentialgleichungen dividiert durch das Produkt von bekannten, bei Bildung jener einzelnen Differentialgleichungen rational aus den Koeffizienten des Systems und deren Ableitungen hervorgehenden Determinanten.

3.

I. Über die Bestimmung der Differentialdeterminante der Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung m-ter Ordnung mit bei $x=a$ einwertigen Koeffizienten siehe Abh. Bd. 96 Nr. 14 und 21. Enthalten die Koeffizienten der Differentialgleichung rational neben der unabhängigen Variablen eine algebraische Funktion, welche bei $x=a$ einen R-blättrigen Windungspunkt hat, so wird $(x-a)^{\frac{1}{R}}=\zeta$ gesetzt (vgl. Abh. Bd. 123 Nr. 9). Die Differentialdeterminante D_x der m linearunabhängigen Integrale, welche von x abhängen, und diejenige D_ζ derselben Integrale als Funktionen von ζ sind durch die Beziehung verbunden

$$(1.) \qquad D_\zeta=\left(\frac{dx}{d\zeta}\right)^{\frac{m(m-1)}{2}} D_x.$$

In den simultanen linearen Differentialgleichungen, deren Koeffizienten rational neben der unabhängigen Variablen eine algebraische Funktion enthalten, sei bei $x=a$ $(x-a)^{\frac{1}{R}}=\zeta$ gesetzt. Das ursprüngliche System simultaner von x abhängiger Differentialgleichungen

$$(2.) \qquad \frac{dy}{dx}=f_1+X_1, \quad \frac{du}{dx}=f_2+X_2, \quad \ldots \frac{dz}{dx}=f_m+X_m$$

geht dadurch in das System von ζ abhängender Differentialgleichungen

$$(3.) \quad \frac{dy}{d\zeta}=(f_1+X_1)\frac{dx}{d\zeta}, \quad \frac{du}{d\zeta}=(f_2+X_2)\frac{dx}{d\zeta}, \quad \ldots \quad \frac{dz}{d\zeta}=(f_m+X_m)\frac{dx}{d\zeta}$$

über und umgekehrt (bei homogenen Differentialgleichungen sind die X gleich Null) (vgl. Abh. Bd. 131 Nr. 5 (10.)).

II. Bei dem System simultaner homogener linearer Differentialgleichungen, deren Koeffizienten rational neben der unabhängigen Variablen eine algebraische Funktion enthalten, wird nun zunächst die Zerlegung nach Abh. Bd. 133 Nr. 1 durch rationale Operationen vorgenommen.

Dieses System a. a. O. (1.) sei durch A bezeichnet. Dasselbe zerfällt in die dort angegebene einzelne homogene lineare Differentialgleichung (16.) — dieselbe sei mit b bezeichnet —, die Ausdrücke a. a. O. (17.) (Bezeichnung c) und in das System simultaner nicht homogener linearer Differentialgleichungen a. a. O. (18.) (Bezeichnung d), zu welchen das System simultaner homogener linearer Differentialgleichungen a. a. O. (24.) (Bezeichnung e) gehört.

Weiter möge dieses System e in folgende den vorhergehenden entsprechende Elemente zerfallen, deren Bezeichnung entsprechend ist, nämlich in eine einzelne homogene lineare Differentialgleichung b', Ausdrücke c' und ein System simultaner nicht homogener linearer Differentialgleichungen d', zu welchen das System simultaner, homogener linearer Differentialgleichungen e' gehört.

Letzteres System e' möge in die einzelne homogene lineare Differentialgleichung b'' und Ausdrücke c'' zerfallen (der in Abh. Bd. 131 behandelte Fall). —

In b'', welches von x abhängt (Bezeichnung b''_x) wird $(x-a)^{\frac{1}{R}}=\zeta$ eingeführt (Bezeichnung b''_ζ). Die entsprechende Bezeichnung wird auch bei c'', e' etc. angewandt. Die von ζ abhängenden Integrale von b''_ζ seien aufgestellt. In c''_x wird dann alles durch ζ ausgedrückt, wodurch c''_ζ hervorgeht, und es werden die Ausdrücke der Integrale von b''_ζ eingetragen. Wird x in die Integrale von b''_ζ eingeführt durch $(x-a)^{\frac{1}{R}}=\zeta$, so werden dieselben die Integrale von b''_x; ebenso entsteht c''_x aus c''_ζ. Die Integrale von b''_x und die Ausdrücke c''_x liefern ein Fundamentalsystem von Lösungen von e'_x (Abh. Bd. 131 Nr. 2 (10.)). Aus e'_x geht durch Einführung von ζ nach (2.) (3.) (die X gleich Null) das System e'_ζ hervor. Dieses hat alsdann die vorhin genannten Integrale von b''_ζ und die Ausdrücke c''_ζ zum Fundamentalsystem von Lösungen.

Die Differentialdeterminante der Integrale von b''_ζ sei ausgedrückt. Nach (1.) ergibt sich hieraus der Ausdruck der Differentialdeterminante der Integrale von b''_x. Die Determinante des Fundamentalsystems der Lösungen von e''_x wird durch den Ausdruck Nr. 2 (8.) gegeben. Aus demselben geht durch $x-a=\zeta^R$ (Anwendung von (1.)) die Determinante des Fundamentalsystems von Lösungen von e'_ζ hervor. —

In b'_x wird ζ eingeführt: b'_ζ. Die Integrale von b'_ζ seien aufgestellt. Dieselben werden durch Einführung von x Integrale von b'_x. d'_x ist ein System simultaner nichthomogener linearer Differentialgleichungen, in welchen die den X in (2.) entsprechenden Größen durch Ausdrücke Abh. Bd. 133 Nr. 1 (20.) als Funktionen eines Integrales von b'_x gegeben sind. In d'_x wird ζ eingeführt (2.), (3.) und in die jetzt auftretenden Ausdrücke X_ζ ein Integral von b'_ζ eingetragen. Aus dem vorhergehenden bekannt sind die Lösungen von e'_ζ und die Determinante derselben. Hieraus erfolgt nach den Formeln Abh. Bd. 131 Nr. 5 (9.), (10.) eine Lösung von d'_ζ. Durch Einführung von x wird dieselbe eine Lösung von d'_x. In den Ausdrücken c'_x wird nun alles durch ζ ausgedrückt, wodurch c'_ζ hervorgeht, und es werden in c'_ζ die ermittelten Größen aus b'_ζ und d'_ζ eingetragen. Alsdann wird wieder x eingeführt, wodurch c'_x hervorgeht. Ein Integral aus b'_x, die Lösung von d'_x und die Ausdrücke c'_x bilden nun eine Lösung von e_x (Abh. Bd. 133 Nr. 1 (21.), (22.)). Im ganzen erhält man ein Fundamentalsystem von Lösungen von e_x (vgl. Abh. Bd. 133 Nr. 4 I). Das vorhin genannte Integral aus b'_ζ, die Lösung von d'_ζ und die Ausdrücke c'_ζ bilden dann eine Lösung von e_ζ ((2.), (3.), die $X=0$), und man erhält dadurch ein Fundamentalsystem von Lösungen von e_ζ.

Die Determinante des Fundamentalsystems von Lösungen von e_x wird nun durch den in Nr. 2 beschriebenen Ausdruck gegeben. In denselben geht die Differentialdeterminante der Integrale von b'_x und b''_x ein. Die Differentialdeterminante der Integrale von b'_ζ (bez. b''_ζ) wird ausgedrückt, aus derselben erfolgt nach (1.) diejenige der Integrale von b'_x. Aus der Determinante der Lösungen von e_x ergibt sich durch Einführung von ζ (Anwendung von (1.)) die Determinante des Fundamentalsystems von Lösungen von e_ζ. —

In b_x wird ζ eingeführt: b_ζ. Die Integrale von b_ζ seien aufgestellt. Das weitere Verfahren in bezug auf d_x, d_ζ; c_x, c_ζ ist wie oben. Man

erhält ein Fundamentalsystem von Lösungen von A_x und A_ζ, die Determinante dieser Lösungen von A_x wird durch den Ausdruck aus Nr. 2 gegeben, aus diesem Ausdruck entsteht durch Einführung von ζ unter Anwendung von (1.) die Determinante der Lösungen von A_ζ. Die Lösungen von A_ζ kommen bei nicht homogenen Differentialgleichungen (2.), (3.) in Betracht.

Bei Herstellung der Integrale ist das in Abh. Bd. 133 Nr. 4 II Gesagte zu berücksichtigen.

4.

In Abh. Bd. 131 Nr. 2 II, III war die Umkehrung der ursprünglichen Aufgabe behandelt, nämlich die Aufgabe, ein System simultaner homogener Differentialgleichungen herzuleiten, dessen Integration auf diejenige einer gegebenen einzelnen homogenen linearen Differentialgleichung führt.

Bei dem allgemeinen Falle in Abh. Bd. 133 ist das Verfahren für Lösung der entsprechenden Aufgabe dasselbe. Es wird das in Nr. 1 der genannten Abhandlung Gesagte zugrunde gelegt. Als gegebene Elemente treten folgende auf. Erstens die dortige einzelne homogene lineare Differentialgleichung (16.), dieselbe sei gemäß Abh. Bd. 131 Nr.2 III auf die Form Abh. Bd. 133 Nr. 1 (15.) gebracht, die Bedingungen, die a. a. O. (13.), (14.) angegeben sind, sollen gewahrt bleiben. Zweitens die λ—1 Ausdrücke a. a. O. (17.) oder, was auf dasselbe hinauskommt, es sollen die $\lambda-1$ ersten Gleichungen a. a. O. (8.) erfüllt sein, dann ist auch die λ-te Gleichung (8.) erfüllt. Drittens es sollen in den simultanen Differentialgleichungen a. a. O. (18.) die Ausdrücke g_r $(r=1,\ldots m-\lambda)$ gegeben sein.

Hieraus entstehen in dem Systeme a. a. O. (1.) außer $\frac{dy}{dx}=f_1$ die Differentialgleichungen

$$\text{(1.)} \qquad \frac{dt}{dx}=f_{\lambda+1},\ldots\ \frac{dz}{dt}=f_m,$$

in welchen die Koeffizienten von u bis s beliebig sind. Die übrigen Differentialgleichungen a. a. O. (1.) ergeben sich in folgender Weise. Es entsteht durch Differentiation der ersten Gleichung Abh. Bd. 133 Nr. 1 (8.) gemäß der zweiten Gleichung (8.), ferner durch Differentiation der zweiten

Gleichung (8.) gemäß der dritten Gleichung (8.) usw. das Gleichungssystem:

$$(2.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + b_1 F_1 + A_{11}\dfrac{du}{dx} + \cdots + A_{1,\lambda-1}\dfrac{ds}{dx} \\ \qquad + \left(A_{1,\lambda}\dfrac{dt}{dx} + \cdots + A_{1,m-1}\dfrac{dz}{dx}\right) = F_2(y, \ldots z), \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} + b_2 F_1 + A_{21}\dfrac{du}{dx} + \cdots + A_{2,\lambda-1}\dfrac{ds}{dx} \\ \vdots \qquad + \left(A_{2,\lambda}\dfrac{dt}{dx} + \cdots + A_{2,m-1}\dfrac{dz}{dx}\right) = F_3(y, \ldots z), \\ \dfrac{\partial F_{\lambda-1}}{\partial x} + b_{\lambda-1} F_1 + A_{\lambda-1,1}\dfrac{du}{dx} + \cdots + A_{\lambda-1,\lambda-1}\dfrac{ds}{dx} \\ \qquad + \left(A_{\lambda-1,\lambda}\dfrac{dt}{dx} + \cdots + A_{\lambda-1,m-1}\dfrac{dz}{dx}\right) = F_\lambda(y, \ldots z). \end{cases}$$

Hieraus folgen mit Bezugnahme auf (1.) und a. a. O. (13.) die Differentialgleichungen

$$(3.)\qquad \frac{du}{dx} = f_2, \quad \ldots \frac{ds}{dx} = f_\lambda.$$

Und umgekehrt: Die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f_1$, die Differentialgleichungen (1.) und die Differentialgleichungen (3.), demnach auch die Gleichungen (2.) seien erfüllt. Aus (2.) folgen gemäß den Gleichungen Abh. Bd. 133 Nr. 1 (3.) bis (6.) die λ ersten der dortigen Gleichungen (8.), damit ist die gegebene Gleichung a. a. O. (15.) erfüllt. Dann ergeben sich aus den $\lambda - 1$ ersten Gleichungen (8.) die gegebenen $\lambda - 1$ Ausdrücke a. a. O. (17.). Und nun folgen aus (1.) die simultanen Differentialgleichungen a. a. O. (18.) mit den gegebenen Ausdrücken $g_r (r = 1, \ldots m - \lambda)$.

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826.

Herausgegeben

unter Mitwirkung der Herren

Frobenius, Hettner, Knoblauch, Lampe, Schottky, Schwarz

von

K. Hensel.

Mit tätiger Beförderung hoher Königlich Preußischer Behörden.

Band 136.

Heft III/IV.

Ausgegeben den 4. September.

Berlin,

W. 35, Lützowstraße 107/8.

Druck und Verlag von Georg Reimer.

1909.

Jährlich zirka 6 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band. Preis pro Band M. 14.—.

Band 136. Heft 3/4.

Inhaltsverzeichnis.

Hensel, K., Über die zu einer algebraischen Gleichung gehörigen Auflösungskörper . . . . . Seite 183

Hellinger, E., Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlichvielen Veränderlichen . . . . . — 210

Hurwitz, A., Über die Kongruenz $ax^e + by^e + cz^e \equiv 0 \pmod{p}$ . . . . . — 272

Wieferich, A., Zum letzten *Fermat*schen Theorem . . . . . — 293

— — Zur Dreiecksgeometrie . . . . . — 303

Thomé, L. W., Über simultane lineare Differentialgleichungen (Zusatz zu den Abhandlungen des Verfassers in den Bänden 131, 133 dieses Journals) — 306

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion **ausschließlich** unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik,
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Breiter Weg 7.

VERLAG VON GEORG REIMER BERLIN W. 35

NEUE RECHENTAFELN

FÜR MULTIPLIKATION UND DIVISION MIT ALLEN EIN- BIS VIERSTELLIGEN ZAHLEN

HERAUSGEGEBEN VON

Dr. J. PETERS

OBSERVATOR AM KÖNIGL. ASTRONOMISCHEN RECHENINSTITUT.

Die Produkte aller Zahlen von 1—10000 mit allen Zahlen von 1—10000 in einer Multiplikationstafel so gegenwärtig zu haben, daß jedes dieser Hundert Millionen Produkte beim Aufschlagen der betreffenden Seite in einer fertigen und mit einem einzigen Blicke ablesbaren Lösung herausspränge, das wird ein am Raum scheiternder Wunsch zahlloser Rechner immer bleiben. Aber wenn man eine Annäherung an die Verwirklichung dieses Problems und eine ganz eminente Vereinfachung der Rechnung darin erblickt, daß man jedes Produkt zweier vierstelligen Zahlen oder einer drei- mit einer vierstelligen Zahl durch einmaliges Aufschlagen und einmaliges Addieren zweier in der gleichen Vertikalreihe derselben Seite befindlichen Ziffern erhält, dann bedeutet diese neue Tafel, die sich hinsichtlich der Durchsichtigkeit und Klarheit der Anlage die Crelle'sche zum Vorbild genommen hat, einen ganz bedeutenden Fortschritt.

Für Finanz- und Bau-Behörden, Kataster- und Steuerämter, Berufsgenossenschaften, Astronom. Institute, Banken, Sparkassen, große industr. Etablissements, Versicherungs-Gesellschaften, Eisenbahn-Direktionen, Hüttenwerke, Maschinenfabriken, Brückenbau- und Konstruktionsanstalten, Schiffswerften etc.

unentbehrliches Hilfsmittel.

Umfang 500 Seiten.

Preis solid in Ganzleinen geb. M. 15.—

VERLAG VON GEORG REIMER BERLIN W. 35